

République du Sénégal
Ministère de l'Enseignement supérieur,
de la Recherche et de l'Innovation

UNIVERSITÉ ASSANE SECK DE ZIGUINCHOR



UFR SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES

MÉMOIRE DE MASTER

Domaine : Sciences et Technologies
Mention : Mathématiques et Applications
Spécialité : Mathématiques Appliquées
Option : Probabilités

THÈME :

**ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES
RÉTROGRADES DIRIGÉES PAR UN MOUVEMENT
BROWNIEN FRACTIONNAIRE**

Présenté par : Saliou Siby DIATTA

sous la direction de : Dr. Ibrahima MENDY

avec la supervision de : Pr. Clément MANGA

Soutenu publiquement le 14 Mars 2026

Devant le jury composé de :

Prénom et Nom	Grade	Qualité	Établissement
Emmanuel N. CABRAL	Professeur Assimilé	Président	UASZ
Clément MANGA	Professeur Assimilé	Superviseur	UASZ
Mor NDONGO	Maître de conférences	Examineur	UASZ
Ibrahima MENDY	Maître de conférences	Directeur	UASZ

Année académique : 2024–2025

« *En mathématiques, on ne comprend pas les choses,
on s'y habitue.* »
– **John von Neumann**

Dédicaces

Je dédie ce mémoire :

À mes chers parents, *Sidya Diatta* et *Diané Diédhiou*. Je vous consacre ce travail avec une profonde gratitude pour votre amour inconditionnel. Votre présence constante et votre soutien indéfectible ont été les piliers essentiels de cette aventure académique.

À ma chère famille, pour son soutien sans faille, ses encouragements constants et l'affection dont elle m'entoure. Ce travail est le fruit de vos sacrifices et de votre bienveillance tout au long de mon parcours. Une pensée particulière et toute ma **reconnaissance** à **Aliou Bandjul Sané** et à **Bintou Diatta** pour leur soutien précieux durant toute cette période.

Mes sincères dédicaces à l'administration et au corps professoral de *l'Université Assane Seck de Ziguinchor*, particulièrement à l'UFR des Sciences et Technologies et au Département de Mathématiques. Je remercie l'ensemble des enseignants qui ont su éveiller en moi la rigueur scientifique et la passion des mathématiques. Vous avez posé les fondations sur lesquelles repose ce travail.

Remerciements

Au terme de ce travail, je tiens à exprimer ma profonde gratitude et ma reconnaissance envers le **Tout-Puissant**, pour m'avoir accordé la volonté, la force et la persévérance nécessaires à l'aboutissement de ce mémoire.

Mes premiers remerciements s'adressent à mon encadreur, **Dr. Ibrahima Mendy**, pour avoir accepté de diriger ce travail. Je le remercie pour sa disponibilité constante, ses conseils précieux, sa rigueur scientifique et la confiance qu'il m'a témoignée tout au long de cette étude.

J'adresse également mes sincères remerciements aux membres du jury qui me font l'honneur d'évaluer ce travail :

- **Pr. Emmanuel Nicolas Cabral**, en sa qualité de Président du jury ;
- **Pr. Clément Manga**, Superviseur ;
- **Dr. Mor Ndong**, Examineur.

Je les remercie par avance pour l'attention qu'ils porteront à mon mémoire et pour leurs critiques constructives.

Je tiens aussi à remercier l'ensemble du corps professoral du Département de Mathématiques de l'Université Assane Seck de Ziguinchor, pour la qualité de l'enseignement reçu et pour les bases académiques solides qui nous ont été inculquées.

J'exprime ma vive gratitude à mes camarades de la 6^e promotion de Mathématiques, Physique et Informatique (MPI), particulièrement à Ansou Bodian, Adama Samba Keita, Mamadou Sanokho, Keita Mballo, William Diedhiou, Adama Sonko, Ndieundé Mane, Fulgence Alphonse Badiane, Bassirou Lo, Aissatou Mbaye, Rougui Lomé et Mamadou Balde, pour les moments de partage et de solidarité.

Enfin, j'exprime ma profonde reconnaissance au **Dr Raphaël Diatta** et à **Mr. Lamine Mané** pour leurs conseils bienveillants et leur soutien constant durant la rédaction de ce mémoire. J'adresse également une pensée particulière à mon meilleur ami, **Samba Kébé**, qui m'a soutenu avec dévouement du début à la fin de mon cursus.

Table des matières

Résumé	5
Abstract	6
Notations et Abréviations	7
1 Processus stochastiques	11
1.1 Définitions	11
1.2 Martingale	16
1.3 Mouvement brownien standard	17
1.4 Mouvement brownien fractionnaire	21
2 EDSR dirigées par un Mouvement Brownien Fractionnaire	34
2.1 Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades Classiques	34
2.2 Espérance quasi-conditionnelle	40
2.3 EDSR dirigées par un Mouvement Brownien Fractionnaire	43
2.3.1 Cas linéaire	43
2.3.2 Cas non linéaire	55
Bibliographie	66

Résumé

Ce mémoire est consacré à l'étude théorique des **Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR)** dirigées par un **Mouvement Brownien Fractionnaire (mBf)** d'indice de Hurst $H \in (0, 1)$.

Le cadre classique des systèmes stochastiques dirigés par le mouvement brownien standard est insuffisant pour modéliser des phénomènes réels présentant une **dépendance temporelle persistante** ou une **mémoire à long terme** (cas $H > 1/2$). L'introduction du mBf permet de surmonter cette limitation. Cependant, l'étude des EDSR dans ce contexte non-markovien est rendue complexe par la **non-martingalité** du mBf et l'absence d'une variation quadratique classique, nécessitant le développement d'outils analytiques spécifiques.

L'objectif principal de ce mémoire est de présenter les **résultats d'existence et d'unicité** de la solution des EDSR dirigées par un mBf dans les cas linéaire et non linéaire.

La méthodologie adoptée par [6] repose sur l'extension de la théorie classique des EDSR et l'utilisation :

1. du **Calcul de Malliavin** pour définir l'intégrale stochastique par rapport au mBf (intégrale de Skorokhod);
2. d'**espaces de Banach pondérés** appropriés;
3. de l'application du **Théorème du point fixe de Picard** sur la forme intégrale de l'EDSR;

Le mémoire donne les conditions suffisantes pour l'**existence et l'unicité** d'une solution pour les EDSR dirigées par un mBf, dans le cas **linéaire** et dans le cas **non linéaire** basées sur une régularité appropriée sur le générateur et la condition terminale. Ce travail contribue ainsi à la formalisation mathématique d'un cadre d'analyse stochastique avancé.

Abstract

This thesis is devoted to the theoretical study of **Backward Stochastic Differential Equations (BSDEs)** driven by a **fractional Brownian motion (fBm)** with Hurst index $H \in (0, 1)$. The classical framework of stochastic systems driven by standard Brownian motion is insufficient for modeling real-world phenomena exhibiting **persistent temporal dependence** or **long-term memory** (the case $H > 1/2$). The introduction of fBm allows us to overcome this limitation. However, the study of BSDEs in this non-Markovian context is complicated by the **non-martingale property** of fBm and the absence of a classical quadratic variation, necessitating the development of specific analytical tools.

The main objective of this memoir is to present the **results of existence and uniqueness** of the solution to BSDEs driven by an fBm in both the linear and nonlinear cases. The methodology adopted by [6] relies on extending the classical theory of BSDEs and utilizing :

1. **Malliavin Calculus** to define the stochastic integral with respect to fBm (Skorokhod integral);
2. The use of appropriate **weighted Banach spaces**;
3. The application of the **Picard Fixed Point Theorem** on the integral form of the BSDE;

The thesis gives the sufficient conditions for the existence and uniqueness of a solution for the BSDEs (Backward Stochastic Differential Equations) driven by an mBf (fractional Brownian motion), in the linear case and in the non-linear case based on an appropriate regularity on the generator and the terminal condition. This work thus contributes to the mathematical formalization of an advanced stochastic analysis framework.

Notations et Abréviations

Ω : Espace des possibles (univers des issues d'une expérience aléatoire).

\mathcal{F} : Tribu ou σ -algèbre sur Ω .

\mathbb{P} : Mesure de probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .

$(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$: Filtration représentant l'information disponible jusqu'au temps t .

$\mathbb{E}[\cdot]$: Espérance mathématique.

$L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: Espace des variables aléatoires de carré intégrable.

B_t^H : Mouvement brownien fractionnaire.

D_t : Dérivée de Malliavin.

$\widehat{\mathbb{E}}_t[\cdot]$: Espérance quasi-conditionnelle.

EDS : Équation différentielle stochastique.

EDSR : Équation différentielle stochastique rétrograde.

mBf : Mouvement brownien fractionnaire.

mBs : Mouvement brownien standard.

EDSR–mBf : Équation différentielle stochastique rétrograde dirigée par un mouvement brownien fractionnaire.

\mathcal{H} : Espace de Hilbert associé au mBf utilisé pour définir l'intégrale de Skorokhod.

$\mathcal{I}_{a+}^\alpha, \mathcal{D}_{a+}^\alpha$: Intégrale et dérivée fractionnaires (au sens de Riemann–Liouville).

$C([0, T], \mathbb{R})$: Espace des fonctions continues sur $[0, T]$.

$L^p([0, T])$: Espace des fonctions p -intégrables sur $[0, T]$.

$\|\cdot\|_{L^2}$: Norme dans $L^2(\Omega)$.

$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$: Produit scalaire dans l'espace de Hilbert associé au mBf.

$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}^2([0, T])$: Espace des processus adaptés de carré intégrable.

\mathbb{L}_H^2 : Espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $[0, T]$ à valeurs dans H .

$\tilde{\mathcal{V}}_T$: Espace fonctionnel de résolution défini par $L^2(0, T; V) \cap \mathcal{C}([0, T]; H)$.

Introduction

L'étude des phénomènes aléatoires dépendant du temps occupe une place centrale dans de nombreux domaines scientifiques, tels que la physique, la finance, la biologie ou encore l'ingénierie. Pour modéliser ces phénomènes, les **processus stochastiques** et, en particulier, les **équations différentielles stochastiques (EDS)** constituent un outil fondamental utilisé dans l'analyse moderne.

Cependant, de nombreux phénomènes réels présentent une **mémoire à long terme** ou une **dépendance temporelle persistante**, que le cadre classique du mouvement brownien standard ne permet pas de décrire adéquatement. En effet, le mouvement brownien standard $(W_t)_{t \geq 0}$ possède des accroissements indépendants et une variation quadratique unitaire, ce qui en fait un processus sans mémoire. Or, la condition d'indépendance des accroissements n'est pas vérifiée pour beaucoup de phénomènes aléatoires comme par exemple le trafic internet, le coût des actions en finance etc....

Pour surmonter cette limite, l'un des processus fréquemment utilisé est le mouvement brownien fractionnaire, introduit par [9] et [11] est un processus gaussien continu, centré, à accroissements stationnaires pas indépendants et non markovien. Le mouvement brownien fractionnaire est donc un processus adapté pour modéliser des phénomènes présentant des effets de dépendance temporelle.

Les **équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR)**, introduites initialement par [3] et systématisées par [13], ont permis de représenter des solutions de problèmes issus du contrôle stochastique, de la théorie du filtrage ou encore des équations aux dérivées partielles non linéaires. Lorsqu'elles sont dirigées par un mBf, ces équations deviennent particulièrement délicates à étudier en raison de la **non-martingalité** du processus et de l'absence de **variation quadratique** classique.

La résolution d'une EDSR dirigée par un mBf requiert donc des outils analytiques plus complexes, notamment :

- l'**intégrale de Skorohod** (ou de divergence), issue du *calcul de Malliavin*, permettant de traiter les intégrales anticipatives ;
- la **notion d'espérance quasi-conditionnelle**, adaptée au caractère non markovien du mBf ;
- et l'utilisation d'**espaces de Banach pondérés**, garantissant les propriétés de convergence nécessaires à l'application du théorème du point fixe.

Ce mémoire s'inscrit dans la continuité des résultats de [6], qui ont établi un cadre rigoureux pour l'étude des EDSR non linéaires dirigées par un mBf, en généralisant la théorie classique des EDSR à un contexte non markovien.

L'objectif principal de ce mémoire est d'étudier les **équations différentielles stochastiques rétrogrades dirigées par un mouvement brownien fractionnaire dans les cas linéaires et non linéaires**, et plus précisément d'établir les **résultats d'existence et d'unicité** des solutions sous certaines hypothèses de régularité. Pour cela, nous suivrons la méthodologie développée par [6], fondée sur :

1. la construction de l'intégrale stochastique adaptée au mBf (intégrale de Skorokhod);
2. l'introduction des espaces de Banach pondérés appropriés;
3. la formulation de l'EDSR sous forme intégrale;
4. et enfin, l'application du théorème du point fixe pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Ce mémoire est structuré comme suit :

- **Chapitre I** : Introduction générale
- **Chapitre II** : Rappel des notions fondamentales sur les processus stochastiques, les martingales et l'intégrale d'Itô et le mouvement brownien fractionnaire.
- **Chapitre III** : Constitue le cœur du travail. Il est consacré aux **équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR)** dirigées par un mBf, d'abord dans le **cas linéaire**, puis dans le **cas non linéaire**, selon la méthode proposée par [6].
- **Chapitre IV** : Conclusion et Perspectives

Ainsi, ce mémoire vise à contribuer à la compréhension théorique et à la formalisation mathématique des EDSR dirigées par mBf, en fournissant un cadre d'étude cohérent reliant analyse stochastique classique et calcul fractionnaire.

1

Processus stochastiques

Ce chapitre est consacré à la présentation des outils fondamentaux de la théorie des processus stochastiques, indispensables à l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) et, en particulier, celles dirigées par un mouvement brownien fractionnaire.

Ainsi, ce chapitre pose les fondations théoriques nécessaires à l'étude approfondie des EDSR dirigées par un mBf et offre une transition naturelle vers les développements plus techniques des chapitres suivants.

1.1 Définitions

1.1.1 Espace de probabilité

Un espace de probabilité est un triplet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ où :

- Ω est l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire (appelé *Espace fondamentale*),
- \mathcal{F} est une tribu (ou σ -algèbre) sur Ω , c'est-à-dire une collection de sous-ensembles de Ω contenant Ω elle-même, stable par complémentaire et réunion dénombrable,
- \mathbb{P} est une probabilité sur (Ω, \mathcal{F}) .

1.1.2 Filtration et Adaptation

Nous nous intéressons à des phénomènes évoluant au cours du temps. À chaque instant t , l'ensemble des informations disponibles est représenté par une tribu (\mathcal{F}_t) , appelée filtration, qui reflète la connaissance accumulée jusqu'à cet instant.

Définition 1.

Une *filtration* est une famille croissante de tribus $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ telle que :

$$\forall s \leq t, \quad \mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}$$

Chaque \mathcal{F}_t représente l'information disponible jusqu'au temps t .

Définition 2. [\mathcal{F}_t -mesurabilité]

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $(\mathcal{F}_t)_{t \in T}$ une filtration. Une variable aléatoire $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est dite \mathcal{F}_t -mesurable si, pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \subset \mathcal{F}_t.$$

Autrement dit, la valeur de X à l'instant t dépend uniquement de l'information disponible jusqu'à cet instant t , c'est-à-dire de ce qui est contenu dans la filtration \mathcal{F}_t .

Définition 3 [Processus stochastique]

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $T \subset \mathbb{R}$ un ensemble d'indices, représentant généralement le temps. Un *processus stochastique* $(X_t)_{t \in T}$ est une famille de variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans un espace mesurable (E, \mathcal{E}) :

$$\begin{aligned} X : T \times \Omega &\rightarrow E, \\ (t, \omega) &\mapsto X_t(\omega), \quad \forall t \in T. \end{aligned}$$

Autrement dit, un processus stochastique est une collection de variables aléatoires indexées par le temps, qui modélisent l'évolution aléatoire d'une grandeur au fil du temps.

Définition 4.

Un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ est dit *adapté* à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ si, pour tout $t \geq 0$, la variable aléatoire X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Le processus X est dit à *trajectoires continues* (ou simplement *continu*) si, pour presque tout $\omega \in \Omega$, l'application

$$t \mapsto X_t(\omega)$$

est continue sur $[0, \infty)$. Autrement dit, les trajectoires sont continues pour presque tous les ω .

Définition 5. (Processus càdlàg)

Un processus aléatoire $X = \{X_t\}_{t \geq 0}$ est dit càdlàg (ou processus continu à droite, limité à gauche) si, pour presque tout ω dans l'espace de probabilité :

1. (Continuité à droite) pour tout $t \geq 0$,

$$\lim_{s \downarrow t} X_s(\omega) = X_t(\omega).$$

2. (Limites à gauche finies) pour tout $t > 0$,

$$\lim_{s \uparrow t} X_s(\omega)$$

existent et sont finies.

Autrement dit, pour chaque trajectoire $t \mapsto X_t(\omega)$, on a :

$$\lim_{s \downarrow t} X_s(\omega) = X_t(\omega) \quad \text{et} \quad \lim_{s \uparrow t} X_s(\omega) \text{ existent et sont finies.}$$

Définition 6 (Processus de Markov).

Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ est dit *de Markov* si, pour tout $t \geq 0$ et tout événement futur A , on a

$$\mathbb{P}(X_{t+h} \in A \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(X_{t+h} \in A \mid X_t), \quad h > 0.$$

Théorème 1

Soit $\{X_t : t \in \mathbb{R}\}$ un processus Gaussien centré. Si X est un processus de Markov alors $\forall t < u < v$ avec $\Gamma(t, t) > 0$,

$$\Gamma(s, u)\Gamma(t, v) = \Gamma(s, v)\Gamma(t, u) \quad (1.1)$$

où $\Gamma(s, t)$ est la fonction de covariance de X . De plus, si $\Gamma(t, t) = 0$ alors $\{X_s : s < t\}$ et $\{X_s : s > t\}$ sont indépendants.

Définition 7 (Accroissements indépendants).

Un processus stochastique $(X_t)_{t \geq 0}$ possède des *accroissements indépendants* si, pour tout choix de temps

$$0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n,$$

les variables aléatoires

$$X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

Définition 8 [Auto-similarité]

Un processus stochastique $X = \{X(t), t \geq 0\}$ est dit **auto-similaire** d'indice $H > 0$ (exposant de Hurst) si, pour tout facteur d'échelle $a > 0$, les distributions de dimension finie des processus $\{X(at)\}$ et $\{a^H X(t)\}$ sont identiques :

$$X(at) \stackrel{\mathcal{L}}{=} a^H X(t)$$

où $\stackrel{\mathcal{L}}{=}$ désigne l'égalité en loi.

Définition 9 [Stationnarité au sens strict]

Un processus stochastique $\{X_t, t \in \mathbb{T}\}$ est dit **stationnaire au sens strict** si sa loi de probabilité jointe est invariante par translation dans le temps. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, pour tout ensemble d'instant (t_1, \dots, t_n) et pour tout décalage h , on a :

$$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$$

Définition 10 [Stationnarité d'ordre 2]

Un processus $\{X_t\}$ est dit **stationnaire d'ordre 2** (ou stationnaire au sens faible) si les trois conditions suivantes sont satisfaites :

1. L'espérance est constante : $E[X_t] = m, \forall t$.
2. La variance est finie : $E[X_t^2] < \infty, \forall t$.
3. L'autocovariance ne dépend que du délai k entre deux observations :

$$\text{Cov}(X_t, X_{t+k}) = \gamma(k)$$

Définition 11 (Fonction d'autocovariance).

Soit $(X_t)_{t \in T}$ un processus stochastique de moyenne $\mu(t) = \mathbb{E}[X_t]$. Pour tous instants $s, t \in T$, la *fonction d'autocovariance* du processus est définie par

$$\gamma(s, t) = \text{Cov}(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mu(s))(X_t - \mu(t))].$$

Si le processus est *stationnaire au second ordre*, alors $\mu(t)$ est constante et l'autocovariance ne dépend que du décalage $h = t - s$:

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h}).$$

Définition 12 (Processus à mémoire courte).

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle, et soit

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$$

sa fonction d'autocovariance. On dit que le processus (X_t) est à *mémoire courte* si

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |\gamma(h)| < +\infty.$$

Remarque

Dans le cas d'un processus indexé par le temps continu, la condition équivalente est

$$\int_0^{+\infty} |\gamma(h)| dh < +\infty.$$

Définition 13 (Processus à mémoire longue).

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ un processus stochastique stationnaire de moyenne nulle, et soit

$$\gamma(h) = \text{Cov}(X_t, X_{t+h})$$

sa fonction d'autocovariance. On dit que le processus (X_t) est à *mémoire longue* si

$$\sum_{h=-\infty}^{+\infty} |\gamma(h)| = +\infty,$$

c'est-à-dire si sa fonction d'autocovariance décroît trop lentement pour être sommable.

Une caractérisation équivalente usuelle est l'existence d'un exposant $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ et d'une constante $c > 0$ tels que

$$\gamma(h) \sim c h^{2H-2} \quad \text{lorsque } h \rightarrow +\infty,$$

ce qui correspond à une décroissance de type puissance.

Définition 14 (Inégalité de Cauchy–Schwarz).

Soient X et Y deux variables aléatoires dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, c'est-à-dire telles que $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ et $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$. Alors, l'inégalité de Cauchy–Schwarz affirme :

$$|\mathbb{E}[XY]| \leq \|X\|_2 \|Y\|_2,$$

où la norme $\|\cdot\|_2$ est la *norme* L^2 définie par

$$\|X\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}[X^2]}.$$

Plus généralement, soit u et v deux éléments d'un espace de Hilbert $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, muni du produit scalaire $\langle u, v \rangle$. Alors :

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|,$$

où la norme $\|\cdot\|$ est la norme induite par le produit scalaire :

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}.$$

Dans les espaces $L^2(\mu)$ de fonctions mesurables, si $u, v \in L^2(\mu)$, alors $uv \in L^1(\mu)$, et l'inégalité de Cauchy–Schwarz s'écrit :

$$\left| \int_{\Omega} u(x)v(x) d\mu(x) \right| \leq \|u\|_{L^2(\mu)} \|v\|_{L^2(\mu)},$$

avec la norme L^2 :

$$\|u\|_{L^2(\mu)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^2 d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

1.2 Martingale

Les martingales sont des processus stochastiques particuliers qui modélisent des jeux "équitables", où l'espérance conditionnelle du gain futur est égale au gain actuel.

Définition 15

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Un processus $(M_t)_{t \geq 0}$ est une *martingale* (réelle) s'il vérifie les trois conditions suivantes :

1. M_t est \mathcal{F}_t -mesurable pour tout $t \geq 0$,
2. $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$ pour tout t ,
3. Pour tout $0 \leq s \leq t$, on a

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \quad (\text{presque sûrement}).$$

Définition 16.

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une famille de variables aléatoires et $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ une filtration. On dit que X est une **sur-martingale** (resp. **sous-martingale**) par rapport à (\mathcal{F}_t) si :

1. pour tout t , X_t est \mathcal{F}_t -mesurable et intégrable,
2. pour tous $s \leq t$,

$$\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s \quad (\text{resp. } \geq X_s).$$

Définition 17.(Inégalité maximale de Doob)

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ une martingale (ou une sous-martingale positive) à trajectoires càdlàg.

1. Version L^p (Moments)

Pour tout $p > 1$, on a :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^p \right] \leq \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|X_T|^p].$$

2. Version Probabiliste (pour Martingale, $p > 1$)

Pour tout $p > 1$ et tout $C > 0$, l'inégalité est :

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t| \geq C \right) \leq \frac{1}{C^p} \left(\frac{p}{p-1} \right)^p \mathbb{E}[|X_T|^p].$$

3. Version Probabiliste Simplifiée (pour Sous-Martingale Positive, $p = 1$)

Si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une sous-martingale positive (i.e., $X_t \geq 0$), pour tout $C > 0$:

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} X_t \geq C \right) \leq \frac{1}{C} \mathbb{E}[X_T].$$

Définition 18. (Inégalités de Burkholder–Davis–Gundy)

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une martingale locale continue, telle que $X_0 = 0$, et soit $\langle X \rangle_t$ sa variation quadratique. Pour tout réel $p > 0$, il existe des constantes strictement positives c_p et C_p , dépendant uniquement de p , telles que pour tout temps d'arrêt (ou tout $T > 0$) :

$$c_p \mathbb{E}(\langle X \rangle_\tau^{p/2}) \leq \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |X_t|^p \right] \leq C_p \mathbb{E}(\langle X \rangle_\tau^{p/2}).$$

En particulier, pour un horizon déterministe $T > 0$:

$$c_p \mathbb{E}(\langle X \rangle_T^{p/2}) \leq \mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|^p \right] \leq C_p \mathbb{E}(\langle X \rangle_T^{p/2}).$$

1.3 Mouvement brownien standard

On se donne un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ et un processus $(W_t)_{t \geq 0}$ sur cet espace .

Définition 19.

Un processus stochastique $W = \{W_t : t \geq 0\}$ à valeurs réelles, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, est appelé processus de Wiener (ou mouvement brownien standard) si et seulement si $W = (W_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien nul en 0, centré, continu et de fonction de covariance :

$$\text{Cov}(W_t, W_s) = \mathbb{E}(W_t W_s) = \min(t, s) \forall s, t \in \mathbb{R}^*.$$

1.3.1. Propriétés fondamentales

1. $W_0 = 0$ presque sûrement.
2. **Accroissements indépendants** : pour tous $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, les variables

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_n} - W_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

3. **Accroissements stationnaires et gaussiens** : pour tout $s < t$,

$$W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t - s).$$

4. **Trajectoires continues** presque sûrement : $t \mapsto W_t(\omega)$ est continue pour presque tout $\omega \in \Omega$.
5. **Fonction de covariance** : pour tous $s, t \geq 0$,

$$\text{Cov}(W_s, W_t) = \min(s, t),$$

en particulier $\text{Var}(W_t) = t$.

6. **Martingale** : pour toute filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptée à W ,

$$\mathbb{E}[W_t | \mathcal{F}_s] = W_s, \quad 0 \leq s \leq t.$$

7. **Processus markovien** : la loi future dépend uniquement de l'état présent, i.e.,

$$\mathbb{P}(W_t \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(W_t \in A \mid W_s), \quad \forall A \subset \mathbb{R}, 0 \leq s \leq t.$$

8. **Mémoire courte** : le processus ne conserve pas d'information sur ses accroissements passés. Mathématiquement, pour tous

$0 \leq t_0 < t_1 \leq t_2 < t_3 \leq \dots \leq t_{2n-1} < t_{2n}$, les accroissements non chevauchants

$$W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_3} - W_{t_2}, \dots, W_{t_{2n}} - W_{t_{2n-1}}$$

sont mutuellement indépendants.

En particulier, si $s < t \leq u < v$, on a

$$\text{Cov}(W_t - W_s, W_v - W_u) = 0.$$

9. **Variation quadratique** : la variation quadratique de W est donnée par

$$\langle W \rangle_t = t.$$

10. **Échelle de Hölder** : pour tout $\alpha \in (0, \frac{1}{2})$, les trajectoires sont α -Hölder continues presque sûrement.

1.3.2 intégrale stochastique

Nous souhaitons donner un sens rigoureux à la variable aléatoire suivante :

$$\int_0^T \theta_s dW_s,$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard et $\theta = (\theta_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus adapté.

1. Rappel du cadre classique

Dans le calcul intégral classique, si $f : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable et $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ est suffisamment régulière, on définit l'intégrale de g par rapport à f par la formule :

$$\int_0^T g(s) df(s) = \int_0^T g(s) f'(s) ds.$$

Si f n'est pas dérivable mais simplement de **variation bornée**, on peut encore définir l'intégrale **de Stieltjes** comme la limite de sommes de Riemann. Pour tout maillage $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ de $[0, T]$, on pose :

$$\sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) (f(t_{i+1}) - f(t_i)),$$

et on définit l'intégrale comme la limite lorsque le pas du maillage tend vers zéro :

$$\int_0^T g(s) df(s) := \lim_{\max |t_{i+1} - t_i| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} g(t_i) (f(t_{i+1}) - f(t_i)).$$

2. Problème avec le mouvement brownien

Le mouvement brownien W_t n'est pas de variation bornée. En particulier, presque sûrement, sa variation totale sur tout intervalle $[0, T]$ est infinie. Cela signifie que la limite ci-dessus n'a pas de sens trajectoire par trajectoire. Autrement dit, on ne peut pas définir $\int_0^T \theta_s dW_s$ en utilisant directement les méthodes classiques de Riemann–Stieltjes.

3. Solution : convergence en norme quadratique

Heureusement, le mouvement brownien possède une **variation quadratique finie**, ce qui permet de définir l'intégrale stochastique en utilisant une limite dans $L^2(\Omega)$ (la norme quadratique).

Pour un processus simple θ (constante sur chaque intervalle du maillage), on définit :

$$\int_0^T \theta_s dW_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}),$$

où la limite est prise dans le sens de la convergence en $L^2(\Omega)$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E} \left[\left| \sum_{i=0}^{n-1} \theta_{t_i} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) - \int_0^T \theta_s dB_s \right|^2 \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

4. Domaine de définition de l'intégrale stochastique

On construit l'intégrale stochastique pour des processus θ appartenant à l'espace suivant :

$$L^2_{\mathcal{F}}([0, T]) := \left\{ (X_t)_{0 \leq t \leq T} \mid X \text{ est un processus } \mathcal{F}_t\text{-adapté, càdlàg, et } \mathbb{E} \left[\int_0^T |X_t|^2 dt \right] < \infty \right\}.$$

Ici :

- \mathcal{F}_t est la filtration naturelle associée au mouvement brownien W ,
- càdlàg signifie que le processus est continu à droite et admet des limites à gauche,
- la condition $\mathbb{E}[\int_0^T |X_t|^2 dt] < \infty$ assure que la variable aléatoire $\int_0^T X_t dW_t$ est bien définie dans $L^2(\Omega)$.

1.3.3. Processus d'Itô (ou semi-martingale continue)

Introduisons une nouvelle classe de processus par rapport auxquels il est également possible de définir une intégrale stochastique.

Définition 20.

Un processus d'Itô est un processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dW_s,$$

où :

- X_0 est une variable aléatoire \mathcal{F}_0 -mesurable ;
- $(\mu_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(\sigma_t)_{0 \leq t \leq T}$ sont deux processus \mathcal{F}_t -adaptés ;

— les conditions d'intégrabilité suivantes sont vérifiées :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |\mu_s| ds \right] < \infty \quad \text{et} \quad \mathbb{E} \left[\int_0^T \sigma_s^2 ds \right] < \infty.$$

On note aussi cette dynamique sous forme différentielle :

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t.$$

1.3.4. Formule d'Itô

La formule d'Itô est un outil fondamental qui permet de calculer les intégrales stochastiques sans avoir besoin de passer par des suites de processus approximants.

Théorème 2 (Formule d'Itô).

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ une fonction deux fois continûment dérivable, dont la dérivée seconde est bornée. Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on a, presque sûrement :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) ds.$$

La version infinitésimale de cette relation est :

$$df(X_t) = f'(X_t) dW_t + \frac{1}{2} f''(X_t) dt.$$

Théorème 3 (Formule d'Itô généralisée)

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{1,2}$, c'est-à-dire dérivable une fois par rapport au temps avec une dérivée continue, et deux fois par rapport à l'espace avec dérivées continues.

Soit $(X_t)_{t \in I}$ un processus d'Itô de la forme :

$$X_t = X_0 + \int_0^t u_s ds + \int_0^t H_s dW_s,$$

où (u_t) et (H_t) sont des processus \mathcal{F}_t -adaptés, satisfaisant les conditions d'intégrabilité classiques.

Alors, le processus $Y_t = f(t, X_t)$ est également un processus d'Itô et on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s) H_s^2 ds.$$

Sous forme différentielle :

$$df(t, X_t) = \left(\frac{\partial f}{\partial t} + u_t \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2} H_t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) (t, X_t) dt + H_t \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dW_t.$$

1.4 Mouvement brownien fractionnaire

Le **mouvement brownien fractionnaire** (mBf), introduit par [9] et [11], constitue une généralisation naturelle du mouvement brownien classique. Contrairement à ce dernier, qui possède des accroissements indépendants et stationnaires, le mBf incorpore une structure de dépendance temporelle permettant de modéliser des phénomènes où la mémoire joue un rôle essentiel. Cette propriété est contrôlée par le *paramètre de Hurst* $H \in (0, 1)$, qui détermine la régularité des trajectoires ainsi que la corrélation entre les accroissements.

Définition 21

Un **Mouvement Brownien Fractionnaire** de paramètre $H \in (0, 1)$ est un processus Gaussien réel centré noté $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et vérifiant :

- (i) $B_0^H = 0$ \mathbb{P} -p.s.
- (ii) $\mathbb{E}[(B_t^H)^2] = |t|^{2H} \quad \forall t \in \mathbb{R}$
- (iii) B^H a des accroissements stationnaires

Remarques

- Le processus $B^{1/2}$ est un **Mouvement Brownien Standard**.
- Le paramètre H est appelé le paramètre de Hurst.
- La fonction R_H est symétrique, semi-définie positive et continue .

1.4.1. Propriétés

Propriété 1

Le mouvement Brownien fractionnaire admet la fonction R_H de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par

$$R_H(t, s) = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H})$$

comme fonction de covariance.

Démonstration :

On a :

$$\mathbb{E}[(B_t^H - B_s^H)^2] = \mathbb{E}[(B_t^H)^2] + \mathbb{E}[(B_s^H)^2] - 2\mathbb{E}[B_t^H B_s^H]$$

Et comme

$$B_t^H - B_s^H \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_{|t-s|}^H$$

Finalement, on a :

$$\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H})$$

Les principales propriétés des trajectoire du processus sont :

1. Trajectoires presque sûrement Hölder continues du mBf

Le mouvement brownien fractionnaire (mBf) $B^H = (B_t^H)_{t \geq 0}$ de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$ possède des trajectoires presque sûrement α -Hölder continues pour tout $\alpha < H$. Autrement dit, pour tout $\alpha < H$, il existe presque sûrement une constante $C_\alpha(\omega)$ telle que, pour tout $s, t \in [0, T]$:

$$|B_t^H - B_s^H| \leq C_\alpha(\omega) |t - s|^\alpha.$$

2. Auto-similarité

$$\{X_{\alpha t} : t \in \mathbb{R}\} \stackrel{d}{=} \{\alpha^H X_t : t \in \mathbb{R}\}, \forall \alpha > 0$$

Théorème 4

Le Mouvement Brownien Fractionnaire $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ de paramètre H est auto-similaire d'ordre H .

Démonstration :

Fixons $\alpha > 0$. Il est évident que $\{B_{\alpha t}^H : t \in \mathbb{R}\}$ et $\{\alpha^H B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ sont deux processus Gaussiens centrés. Il suffit donc de montrer qu'ils ont la même fonction de covariance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[B_{\alpha t}^H B_{\alpha s}^H] &= \frac{1}{2} (|\alpha s|^{2H} + |\alpha t|^{2H} - |\alpha t - \alpha s|^{2H}) \\ &= \frac{1}{2} \alpha^{2H} (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}) \\ \mathbb{E}[(\alpha^H B_t^H)(\alpha^H B_s^H)] &= \alpha^{2H} \mathbb{E}[B_t^H B_s^H] \\ &= \frac{1}{2} \alpha^{2H} (|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t - s|^{2H}) \end{aligned}$$

3. Accroissements stationnaires

On rappelle que les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire sont stationnaires, que l'on considère des versions continues de ce dernier et que $H \in (0, 1)$.

Propriété 2

Les accroissements de B^H sont à dépendance à long terme si et seulement si $H > \frac{1}{2}$.

Démonstration :

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$r(n) = \mathbb{E}[B_{n+1}^H B_n^H] - \mathbb{E}[B_n^H B_n^H] \quad (1.2)$$

$$= \frac{1}{2} [(n+1)^{2H} - 2n^{2H} + (n-1)^{2H}] \quad (1.3)$$

$$= 2H(2H-1)n^{2H-2} + o(n^{2H-2}) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty \quad (1.4)$$

Par (1.4), on voit que $r(n)$ est le terme général d'une série divergente si et seulement si $2H - 2 \geq -1$ c'est à dire si et seulement si $H \geq \frac{1}{2}$.

Propriété 3

Les accroissements du mouvement Brownien fractionnaire sont positivement corrélés si $\frac{1}{2} < H < 1$, négativement corrélés si $0 < H < \frac{1}{2}$ (on parle d'anti-persistance) et indépendants si $H = \frac{1}{2}$.

4. Continuité et régularité des trajectoires

Les trajectoires de B^H sont continues presque sûrement. De plus, pour tout $\varepsilon > 0$, elles sont $(H - \varepsilon)$ -Hölderiennes, c'est-à-dire qu'il existe une constante aléatoire $C > 0$ telle que :

$$|B_t^H - B_s^H| \leq C|t - s|^{H-\varepsilon}, \quad \text{pour tout } s, t \in [0, T].$$

5. Non-martingalité

Le processus B^H n'est **pas une martingale**, sauf dans le cas particulier $H = \frac{1}{2}$. En général, on a :

$$\mathbb{E}[B_t^H | \mathcal{F}_s] \neq B_s^H \quad \text{si } H \neq \frac{1}{2}.$$

6. processus non-Markovien

corollaire 1

Soit $0 < H < 1$ et $H \neq \frac{1}{2}$. Le mouvement Brownien Fractionnaire B^H n'est pas un processus de Markov.

1. Le Mouvement Brownien Fractionnaire $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas Markovien.
2. Le Mouvement Brownien Fractionnaire $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas un semi-martingale.

Démonstration :

- Si B^H était Markovien, comme on a $R_H(0, 0) = 0$, les processus $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ et $\{B_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ seraient indépendants, ce qui est absurde.
- Si B^H était Markovien, sa fonction de covariance vérifierait (1.9) et en particulier, comme $1 < 2 < 3$, on aurait :

$$R_H(1, 3)R_H(2, 2) = R_H(1, 2)R_H(2, 3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(3^{2H} + 1 - 2^{2H})2^{2H} &= \frac{1}{2}(2^{2H} + 1 - 1^{2H})\frac{1}{2}(3^{2H} + 2^{2H} - 1^{2H}) \\ 3^{2H} + 2^{2H} - 2 &= 0 \end{aligned}$$

Après l'étude de la fonction $f(H) = 3^{2H} + 2^{2H} - 2$, on voit que cette fonction ne s'annule que pour $H = \frac{1}{2}$ et pour $H = 1$ (cas exclu par définition). Le seul cas possible ($H = \frac{1}{2}$) correspond à celui du mouvement Brownien ordinaire qui est Markovien.

7. Corrélation des Accroissements

- Si $H > \frac{1}{2}$: les incréments sont **positivement corrélés** (mémoire longue).
- Si $H < \frac{1}{2}$: les incréments sont **négativement corrélés** (effet de retour).
- Si $H = \frac{1}{2}$: les incréments sont indépendants (cas du mouvement brownien classique).

8. Variance des incréments

On a :

$$\mathbb{E}[(B_t^H - B_s^H)^2] = |t - s|^{2H},$$

ce qui reflète la rugosité du processus en fonction de H .

9. Variation quadratique

Pour $H \neq \frac{1}{2}$, le mBf n'admet pas de variation quadratique classique :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}}^H - B_{t_k}^H)^2 = \begin{cases} 0, & \text{si } H > \frac{1}{2}, \\ +\infty, & \text{si } H < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Cela rend inapplicables les méthodes classiques du calcul d'Itô, et motive l'introduction d'intégrales alternatives (Young, Skorohod, Wick, etc.).

1.4.2 Représentation du mouvement brownien fractionnaire par un mouvement brownien standard

Lorsque $H > \frac{1}{2}$, le mouvement brownien fractionnaire (mBf) $B^H = \{B_t^H, t \geq 0\}$ admet une représentation intégrale en termes d'un mouvement brownien standard $W = \{W_t, t \geq 0\}$. Cette représentation, utilisée notamment par [6] dans l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades dirigées par un mBf, repose sur un noyau déterministe K_H vérifiant des propriétés d'intégrabilité adaptées au cas $H > \frac{1}{2}$.

On dispose ainsi de la représentation suivante :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dW_s, \quad t \geq 0.$$

Le noyau $K_H(t, s)$, défini pour $0 < s < t$, est donné par :

$$K_H(t, s) = C_H \left(\frac{s}{t}\right)^{H-\frac{1}{2}} (t-s)^{H-\frac{1}{2}},$$

où C_H est une constante dépendant uniquement du paramètre de Hurst H . Sa valeur explicite est :

$$C_H = \left[\frac{2H \Gamma\left(\frac{3}{2} - H\right)}{\Gamma\left(H + \frac{1}{2}\right) \Gamma(2 - 2H)} \right]^{1/2}.$$

Cette constante est choisie de manière à satisfaire la condition de normalisation :

$$\int_0^t K_H^2(t, s) ds = t^{2H},$$

ce qui garantit que le processus construit possède la variance caractéristique du mBf :

$$\mathbb{E}[(B_t^H)^2] = t^{2H}.$$

Cette représentation joue un rôle essentiel dans [6], car elle permet de ramener toute intégrale par rapport au mBf à une intégrale de Wiener pondérée par le noyau K_H , ouvrant la voie à la définition de l'intégrale de Skorohod, de l'espérance quasi-conditionnelle, ainsi qu'à l'étude des EDSR dirigées par un mBf.

Fondements analytiques

— Pour chaque $t \geq 0$, la fonction $s \mapsto K_H(t, s)$ appartient à $L^2([0, t])$ et possède une régularité hölderienne compatible avec la structure du mBf.

— L'opérateur intégral

$$K_H : L^2([0, T]) \rightarrow \mathcal{H}_H,$$

où \mathcal{H}_H désigne l'espace de Hilbert associé au mBf, est un isomorphisme. Ce point est crucial dans [6] pour construire l'intégrale de Skorohod par dualité.

— Le processus $B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dW_s$ est gaussien et centré, et sa covariance vérifie :

$$\mathbb{E}(B_t^H B_u^H) = \frac{1}{2} (t^{2H} + u^{2H} - |t - u|^{2H}),$$

soit exactement la covariance du mBf de paramètre H .

Propriétés du noyau K_H

— **Régularité** : pour tout $t \geq 0$, $K_H(t, \cdot) \in L^2([0, t])$ et est hölderienne.

— **Singularité en $s = t$** :

$$K_H(t, s) \sim C_H (t - s)^{H - \frac{1}{2}} \quad \text{lorsque } s \rightarrow t^-.$$

— **Homogénéité** : pour tout $a > 0$,

$$K_H(at, as) = a^{H - \frac{1}{2}} K_H(t, s).$$

— **Existence d'un noyau inverse** : il existe un noyau K_H^{-1} tel que

$$W_t = \int_0^t K_H^{-1}(t, s) dB_s^H.$$

Ceci montre que W et B^H sont reliés par un isomorphisme intégral.

1.4.3 L'Espace de Hilbert Associé au Mouvement Brownien Fractionnaire (mBf)

Pour définir rigoureusement l'intégrale stochastique par rapport au Mouvement Brownien Fractionnaire (mBf) $B^H = (B_t^H)_{t \in [0, T]}$ avec paramètre Hurst $H \in (1/2, 1)$, on utilise un espace de Hilbert spécifique construit à partir du noyau de covariance du mBf.

1. Le Produit Scalaire et la Norme

L'espace Θ_t est défini comme la **complétion** de l'ensemble des fonctions continues $C([0, t])$ par rapport à la norme $\|\cdot\|_t$.

- Θ_t est l'**espace de Hilbert associé** au mouvement brownien fractionnaire (mBf) pour $H > 1/2$.
- Cet espace constitue l'**espace d'isométrie** permettant de définir l'intégrale stochastique par rapport au mBf.
- Pour $H > 1/2$, on note que $L^2([0, t]) \subset L^{1/H}([0, t]) \subset \Theta_t$.

Soit $t > 0$. Pour deux fonctions $\xi, \eta \in C([0, t])$, le produit scalaire est défini par :

$$\langle \xi, \eta \rangle_t := \int_0^t \int_0^t \phi(u-v) \xi_u \eta_v du dv, \quad (1.5)$$

où le **noyau de corrélation** $\phi(x)$ est donné par :

$$\phi(x) := 2H(2H-1)|x|^{2H-2}. \quad (1.6)$$

Ce produit scalaire induit la norme associée :

$$\|\xi\|_t^2 := \langle \xi, \xi \rangle_t. \quad (1.7)$$

Théorème 5 [Formule d'Itô pour le mBf][6]

Soit $B^H = (B_t^H)_{t \in [0, T]}$ un mouvement brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$. On considère le processus X_t défini par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t g_s ds + \int_0^t f_s dB_s^H, \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.8)$$

où g et f sont des fonctions déterministes. Soit $F \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$. Alors, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} F(t, X_t) = & F(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial s}(s, X_s) ds + \int_0^t \frac{\partial F}{\partial x}(s, X_s) dX_s \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, X_s) \frac{d}{ds} \|f\|_s^2 ds \end{aligned} \quad (1.9)$$

où l'intégrale par rapport à B^H est une intégrale de type Itô (Wick-Skorohod).

Remarques :

- Dans le cas particulier où $X_t = B_t^H$ (donc $f_s = 1$), on a $\|f\|_s^2 = s^{2H}$. Le terme de correction devient :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (s^{2H}) = \frac{1}{2} (2Hs^{2H-1}) = Hs^{2H-1}$$

Ce qui correspond au terme $H \int_0^t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(s, B_s^H) s^{2H-1} ds$.

- L'article souligne que cette formule repose sur l'utilisation de l'espérance quasi-conditionnelle pour traiter la nature non-martingale du mBf.
- Contrairement au cas classique ($H = 1/2$), le terme de second ordre dépend explicitement du temps s via la dérivée de la norme $\|\cdot\|_s$ dans l'espace de Hilbert Θ_s .

1.4.4 Fonctionnelles polynomiales du mBf

Soit $T > 0$. On note \mathcal{P}_T l'ensemble des fonctionnelles polynomiales du mBf sur $[0, T]$, c'est-à-dire des variables aléatoires de la forme :

$$F = f\left(\int_0^T \xi_1(t) dB_t^H, \dots, \int_0^T \xi_n(t) dB_t^H\right),$$

où f est un polynôme en n variables, et où les fonctions ξ_i sont continues sur $[0, T]$.

1.4.5 Calcul de Malliavin associé au mBf

Définition 2.4 (Dérivée de Malliavin associée au mBf)

On note \mathcal{P}_T l'ensemble des variables aléatoires de la forme

$$F = f\left(\int_0^T \xi_1(t) dB_t^H, \dots, \int_0^T \xi_n(t) dB_t^H\right),$$

où $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\xi_j \in \mathcal{H}$, l'espace de Hilbert associé au mBf.

(1) Dérivée de Malliavin non pondérée.

Pour $F \in \mathcal{P}_T$, la dérivée de Malliavin D^H est définie par :

$$D_s^H F = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j} \left(\int_0^T \xi_1(t) dB_t^H, \dots, \int_0^T \xi_n(t) dB_t^H \right) \xi_j(s), \quad 0 \leq s \leq T.$$

(2) Fonction de poids φ .

Suivant [6], on introduit la fonction

$$\varphi(x) = H(2H - 1)|x|^{2H-2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

qui représente le noyau de covariance du mBf sous forme dérivée :

$$\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \int_0^t \int_0^s \varphi(u - v) du dv.$$

Cette fonction joue un rôle fondamental dans la pondération du calcul de Malliavin pour le mBf.

(3) Dérivée pondérée (ou dérivée intégrée).

Pour $F \in \mathcal{P}_T$, la dérivée pondérée est définie par :

$$\mathbb{D}_t^H F := \int_0^T \varphi(t - s) D_s^H F ds.$$

Cette dérivée correspond à la version adéquate du calcul de Malliavin pour le mBf, et intervient dans la définition de l'intégrale de Skorohod associée au mBf.

Remarque : la dérivée pondérée ne coïncide pas avec D^H en général. Elle représente l'image de D^H par un opérateur de convolution singulier lié à la structure de covariance du mBf.

(4) Opérateur de divergence.

L'opérateur de divergence δ_H est défini comme l'adjoint de D^H considéré comme application linéaire :

$$D^H : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega; \mathcal{H}).$$

Lorsque $u \in L^2(\Omega; \mathcal{H})$ appartient au domaine de δ_H , la variable

$$\delta_H(u)$$

est appelée intégrale de Skorohod de u par rapport au mBf.

(5) Espace de Sobolev–Malliavin.

L'espace $D_{1,2}$ est défini comme le complété de \mathcal{P}_T pour la norme :

$$\|F\|_{1,2}^2 = \mathbb{E}[|F|^2] + \mathbb{E}[\|D^H F\|_{\mathcal{H}}^2].$$

Enfin, on considère l'espace $L_H^{1,2}$ formé des processus stochastiques $F : \Omega \rightarrow H$ tels que

$$\mathbb{E}\left[\|F\|_T^2 + \int_0^T \int_0^T |D_s^H F_t|^2 ds dt\right] < +\infty.$$

Théorème 6 (th 4.2 de [6])

Soient $f_i, g_i : [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ deux processus réels, pour $i = 1, 2$, tels que :

- $f_i, g_i \in L^2([0, T] \times \Omega)$,
- $g_i \in \mathbb{D}_H^{1,2}$,
- les dérivées de Malliavin $D_t^H f_i(s)$ et $D_t^H g_i(s)$ sont continûment différentiables,
- $\mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T |D_t^H g_i(s)|^2 ds dt\right] < \infty$.

On définit :

$$G_i(t) := \int_0^T f_i(s) ds + \int_0^T g_i(s) dB_s^H.$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} G_1(t)G_2(t) &= \int_0^t G_1(s)f_2(s)ds + \int_0^t G_1(s)g_2(s)dB_s^H + \int_0^t G_2(s)f_1(s)ds \\ &\quad + \int_0^t G_2(s)g_1(s)dB_s^H + \int_0^t D_s^H G_1(s) \cdot g_2(s)ds + \int_0^t D_s^H G_2(s) \cdot g_1(s)ds. \end{aligned}$$

Démonstration

En appliquant la formule d'Itô anticipative pour le produit de deux processus de la forme :

$$G_i(t) = \int_0^t f_i(s)ds + \int_0^t g_i(s)dB_s^H,$$

on obtient :

$$d(G_1 G_2)(t) = G_1(t)dG_2(t) + G_2(t)dG_1(t) + d\langle G_1, G_2 \rangle_t^H,$$

où le terme de correction s'écrit :

$$d\langle G_1, G_2 \rangle_t^H = D_t^H G_1(t) \cdot g_2(t)dt + D_t^H G_2(t) \cdot g_1(t)dt.$$

En intégrant de 0 à t , on retrouve l'identité énoncée :

$$\begin{aligned} G_1(t)G_2(t) &= \int_0^t G_1(s)f_2(s)ds + \int_0^t G_1(s)g_2(s)dB_s^H + \int_0^t G_2(s)f_1(s)ds \\ &+ \int_0^t G_2(s)g_1(s)dB_s^H + \int_0^t D_s^H G_1(s) \cdot g_2(s)ds + \int_0^t D_s^H G_2(s) \cdot g_1(s)ds. \end{aligned}$$

Théorème 7 (Représentation en moyenne mobile) [11].

À une constante près, le processus gaussien, réel, continu et centré $G = \{G_t^H : t \in \mathbb{R}\}$ défini par : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$G_t^H = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{+\infty} \left((t-u)_+^{H-\frac{1}{2}} - (-u)_+^{H-\frac{1}{2}} \right) dW_u$$

a la même fonction de covariance que le mouvement brownien fractionnaire, où W est le mouvement brownien standard et Γ désigne la fonction gamma usuelle.

Théorème 8 (Représentation harmonisable) [9].

Le mouvement brownien fractionnaire admet la représentation : pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$W_t^H = \frac{1}{C(\mathbb{H})} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{its} - 1}{|s|^{H+\frac{1}{2}}} d\tilde{W}_s \quad (2.1) \quad \text{avec}$$

$$C(\mathbb{H}) = \sqrt{\frac{\pi}{H\Gamma(2H)\sin(\pi H)}}$$

Théorème 9 (Decremont et Ustundag, 1999 en Norros et al., 1999) (Représentation de type Volterra).

À une constante près, le processus gaussien, réel, continu et centré de type Volterra $V = \{V_t^H : t \in [0, \infty)\}$ défini par : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$V_t^H = \int_0^t K_H(t-s)dW_s \quad (2.2)$$

où le noyau K_H est défini sur $\{(t,s) \in \mathbb{R}_+^2 : 0 \leq s < t\}$ par

$$K_H(t,s) = \left(\frac{t}{s}\right)^{H-\frac{1}{2}} d_H(t-s)^{H-\frac{1}{2}} + d_H\left(\frac{1}{2}-H\right)s^{\frac{1}{2}-H} \int_s^t u^{\frac{1}{2}-H} du$$

avec

$$d_H = \left(\frac{2H\Gamma(\frac{3}{2}-H)}{\Gamma(H+\frac{1}{2})\Gamma(2-2H)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

a la même fonction de covariance que le mouvement brownien fractionnaire.

1.4.6 Intégrales stochastiques par rapport à un mBf

Dans cette section, nous présentons la construction de l'intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien fractionnaire (mBf)

$$B^H = \{B_t^H\}_{t \in [0, T]}, \quad H \in (0, 1),$$

en mettant l'accent sur l'intégrale de *Skorohod* (également appelée intégrale de *divergence*), qui est définie à l'aide du calcul de Malliavin. Cette intégrale constitue l'outil fondamental pour l'étude des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) dirigées par un mBf, car elle permet de traiter des intégrands potentiellement *anticipatifs*, ce qui n'est pas possible avec les intégrales définies au sens classique.

D'autres constructions d'intégrale par rapport au mBf existent dans la littérature. Parmi celles-ci, mentionnons :

- l'intégrale de *Young*, bien définie lorsque $H > \frac{1}{2}$ pour des intégrands Hölder réguliers ;
- l'intégrale de *Stieltjes pathwise* (ou intégrale de *Zähle*), fondée sur une approche de type Riemann–Stieltjes.

Ces intégrales pathwise sont adaptées à l'étude d'équations différentielles stochastiques (non rétrogrades) lorsque les intégrands possèdent une régularité suffisante. Cependant, elles ne sont **pas** utilisées dans le cadre des EDSR dirigées par un mBf, car elles ne permettent pas de gérer l'anticipation inhérente aux solutions rétrogrades.

Ainsi, pour la théorie des EDSR, seules les intégrales basées sur le calcul de Malliavin sont pertinentes, à savoir :

- l'intégrale de *Skorohod*

$$\int_0^t u_s \delta B_s^H,$$

qui est l'intégrale principale utilisée dans les travaux de [6] et Wen et Shi (2016) ;

- l'intégrale de *Wick–Skorohod*

$$\int_0^t u_s d^\circ B_s^H,$$

qui constitue une variante renormalisée équivalente en théorie et apparaît dans certaines formulations linéaires.

Dans ce qui suit, nous détaillons la construction de l'intégrale de Skorohod ainsi que ses principales propriétés.

1. Intégrale au sens de Skorohod

Pour intégrer des processus aléatoires non adaptés, on utilise l'intégrale au sens de Skorohod, définie via le calcul de Malliavin sur l'espace gaussien engendré par le mouvement brownien fractionnaire.

a) Cadre Fonctionnel

Le cadre fonctionnel est établi sur l'espace de probabilité associé au processus stochastique sous-jacent, ici le **Mouvement Brownien Fractionnaire (mBf)** B_t^H .

1. **Espace de Probabilité** : Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité complet.
2. **Processus Sous-jacent (mBf)** : Le mBf $(B_t^H, t \geq 0)$ avec un paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$ est un processus Gaussien centré. Sa fonction de covariance est donnée par :

$$\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H})$$

3. **Espace de Hilbert de l'énergie (\mathcal{H})** : C'est l'espace de Hilbert déterministe qui sert de support pour la dérivation stochastique. Le mBf peut être représenté comme une intégrale d'un processus de Wiener standard W_s par un noyau $K_H(t, s)$:

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dW_s$$

4. **Domaine** : Le domaine de travail est l'espace de Sobolev stochastique $\mathcal{D}^{1,2}(\mathcal{H})$, qui est l'espace des processus à valeurs dans \mathcal{H} qui sont dérivables au sens de Malliavin.

b) Dérivée du Calcul de Malliavin

La dérivation de Malliavin est l'opérateur clé qui permet de définir l'intégrale de Skorohod par dualité.

1. **Fonctionnelles Lisses** : L'opérateur de dérivation D est défini initialement sur l'espace des fonctionnelles cylindriques (lisses) de la forme $F = f(B^H(h_1), \dots, B^H(h_n))$, avec $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $h_i \in \mathcal{H}$.
2. **Définition de la dérivée** : Pour une telle fonction F , la dérivée de Malliavin DF est un processus dans \mathcal{H} défini par

$$D_t F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(B^H(h_1), \dots, B^H(h_n)) h_i(t), \quad t \in [0, T].$$

3. **Espace de Sobolev Stochastique $\mathcal{D}^{1,2}(\mathcal{H})$** : L'opérateur D est étendu à l'espace $\mathcal{D}^{1,2}(\mathcal{H})$, qui est la fermeture des fonctionnelles lisses pour la norme :

$$\|F\|_{1,2}^2 = \mathbb{E}[|F|^2] + \mathbb{E}[\|DF\|_{\mathcal{H}}^2]$$

c) Intégrale de Skorohod (δ)

L'Intégrale de Skorohod, notée $\delta(u)$, est définie comme l'**opérateur adjoint (dual)** de la Dérivée de Malliavin D .

1. **Définition par Dualité** : Un processus $u = (u_t)_{t \in [0, T]}$ appartenant à $L^2(\Omega, \mathcal{H})$ est dans le domaine de δ , noté $\text{Dom}(\delta)$, s'il existe une variable aléatoire $I \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ telle que, pour toute fonctionnelle $F \in \mathcal{D}^{1,2}$:

$$\mathbb{E}[\delta(u)F] = \mathbb{E}[\langle DF, u \rangle_{\mathcal{H}}] \quad (1.10)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}}$ est le produit scalaire dans \mathcal{H} .

2. **L'Opérateur Intégral** : La variable aléatoire I est unique et est l'Intégrale de Skorohod de u , notée :

$$\delta(u) = I = \int_0^T u_t dB_t$$

3. **Généralisation** : L'Intégrale de Skorohod est une généralisation de l'intégrale d'Itô. Elle est définie pour des processus u qui peuvent être **non adaptés** (anticipatifs) à la filtration du processus sous-jacent. Si u est adapté, alors $\delta(u)$ coïncide avec l'intégrale d'Itô.

Théorème 10 [6]

Soit F_t un processus continu à valeurs dans \mathcal{H} et supposons que $F \in \mathbb{L}_H^{1,2}$, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E} \left[\|F\|_{\mathcal{H}_T}^2 + \int_0^T \int_0^T |D_s^H F_t|^2 ds dt \right] < \infty.$$

Alors l'intégrale stochastique

$$\int_0^T F(t) dB_t^H$$

existe dans $L^2(\Omega)$ et vérifie

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T F(t) dB_t^H \right] = 0,$$

$$\mathbb{E} \left[\left(\int_0^T F(t) dB_t^H \right)^2 \right] = \mathbb{E} \left[\|F\|_{\mathcal{H}_T}^2 \right] + \mathbb{E} \left[\int_0^T \int_0^T D_s^H F_t D_t^H F_s ds dt \right].$$

Démonstration

Puisque $F \in \mathbb{L}_H^{1,2}$, il existe une suite $(F^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_T$ de fonctionnelles cylindriques (polynômes de Wiener) telle que

$$F^n \longrightarrow F \quad \text{dans } \mathbb{L}_H^{1,2}.$$

Pour chaque n , l'intégrale de Skorohod

$$\delta(F^n) = \int_0^T F^n(t) \delta B_t^H$$

est bien définie, et l'isométrie du Skorohod appliquée aux éléments de \mathcal{P}_T donne

$$\mathbb{E}[\delta(F^n)] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}[(\delta(F^n))^2] = \mathbb{E}[\|F^n\|_{\mathcal{H}_T}^2] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T D_s^H F_t^n D_t^H F_s^n ds dt\right].$$

La convergence de F^n vers F dans $\mathbb{L}_H^{1,2}$ implique successivement :

1. $\|F^n - F\|_{\mathcal{H}_T} \rightarrow 0$ dans $L^2(\Omega)$;
2. $D^H F^n \rightarrow D^H F$ dans $L^2(\Omega \times [0, T]^2)$.

Par continuité de l'opérateur de divergence $\delta : \mathbb{L}_H^{1,2} \rightarrow L^2(\Omega)$, on obtient donc

$$\delta(F^n) \longrightarrow \delta(F) \quad \text{dans } L^2(\Omega).$$

En passant à la limite dans les identités précédentes, on déduit :

$$\mathbb{E}[\delta(F)] = 0,$$

et

$$\mathbb{E}[(\delta(F))^2] = \mathbb{E}[\|F\|_{\mathcal{H}_T}^2] + \mathbb{E}\left[\int_0^T \int_0^T D_s^H F_t D_t^H F_s ds dt\right].$$

Ainsi, l'intégrale de Skorohod de F est bien définie dans $L^2(\Omega)$ et satisfait les propriétés annoncées.

Ces propriétés de non-martingalité et de dépendance à long terme du mBf imposent de reconsidérer la définition de l'intégrale stochastique. C'est l'objet du chapitre suivant, où nous introduirons l'intégrale de Skorokhod pour résoudre les EDSR

2

EDSR dirigées par un Mouvement Brownien Fractionnaire

2.1 Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades Classiques

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) constituent un outil fondamental de l'analyse stochastique moderne. Introduites initialement par [3] dans le cadre du calcul stochastique appliqué au contrôle optimal, elles ont été rigoureusement formalisées par [13] au début des années 1990. Leur particularité réside dans le fait que, contrairement aux équations différentielles stochastiques classiques définies à partir d'une condition initiale, les EDSR sont formulées à rebours, à partir d'une **condition terminale**.

Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé vérifiant les conditions usuelles, et soit $(B_t)_{0 \leq t \leq T}$ un mouvement brownien standard.

Une Équation Différentielle Stochastique Rétrograde (EDSR) classique est donnée par :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (2.1)$$

où :

- ξ est une variable aléatoire terminale \mathcal{F}_T -mesurable,
- $f : [0, T] \times \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est un générateur,
- (Y_t, Z_t) est le couple de processus inconnu.

Définition 1 (Solution d'une EDSR simple)

Un couple de processus adapté (Y_t, Z_t) est dit solution de l'EDSR classique si :

1. Y est un processus continu et adapté vérifiant

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t|^2 \right] < \infty,$$

2. Z est un processus prévisible (ou adapté) tel que :

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |Z_s|^2 ds \right] < \infty,$$

3. le couple (Y, Z) satisfait l'équation différentielle stochastique rétrograde pour tout $t \in [0, T]$:

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dB_s, Y_t = \xi, t \in [0, T]$$

Ou f est appelé le générateur de l'EDSR et ξ est la contrainte terminale.

Lemme de Gronwel

Énoncé

Soit $g : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable, positive et localement intégrable. Supposons qu'il existe deux constantes $a \geq 0$ et $b \geq 0$ telles que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$g(t) \leq a + b \int_0^t g(s) ds.$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$,

$$g(t) \leq ae^{bt}.$$

Démonstration.

On définit la fonction

$$h(t) := a + b \int_0^t g(s) ds.$$

Par hypothèse, on a $g(t) \leq h(t)$ pour tout $t \in [0, T]$.

Donc,

$$h(t) = a + b \int_0^t g(s) ds \leq a + b \int_0^t h(s) ds,$$

car $g(s) \leq h(s)$.

Posons

$$H(t) := a + b \int_0^t h(s) ds.$$

On a donc $h(t) \leq H(t)$.

La fonction H est absolument continue sur $[0, T]$ et sa dérivée, définie presque partout, est

$$H'(t) = bh(t) \leq bH(t).$$

Ainsi, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$H'(t) \leq bH(t).$$

Le théorème classique d'inégalités différentielles implique alors

$$H(t) \leq H(0)e^{bt} = ae^{bt}.$$

Finalement, puisque

$$g(t) \leq h(t) \leq H(t),$$

on conclut que

$$g(t) \leq ae^{bt}.$$

Hypothèses de travail

L'étude classique des EDSR simples repose sur les conditions suivantes :

(H1) Condition de lipschitz

Le générateur f satisfait une condition de Lipschitz en (y, z) : c'est à dire il existe une constante $L > 0$ telle que pour tous $y, y' \in \mathbb{R}$ et $z, z' \in \mathbb{R}^d$.

$$|f(t, y, z) - f(t, y', z')| \leq L(|y - y'| + |z - z'|),$$

(H2) Condition d'intégrabilité

La condition terminale ξ appartient à $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ De plus, le générateur est de carré intégrable en (t, ω) Pour $t \in [0, T]$, :

$$\mathbb{E}\left[|\xi|^2 + \int_0^T |f(t, 0, 0)|^2 dt\right] < \infty.$$

Ces hypothèses garantissent la bonne formulation du problème et permettent de démontrer l'existence et l'unicité de la solution.

Existence et Unicité de la Solution

Le théorème suivant repose sur le résultat fondamental de [13], qui garantit l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades.

Théorème 1

Sous les hypothèses (H1)-(H2), l'équation différentielle stochastique rétrograde (2.1) admet une unique solution (Y, Z) dans $\mathcal{S}^2 \times \mathcal{H}^2$, où \mathcal{S}^2 est l'espace des processus continus vérifiant $\mathbb{E}[\sup_{t \leq T} |Y_t|^2] < \infty$, et \mathcal{H}^2 celui des processus prévisibles vérifiant $\mathbb{E}[\int_0^T |Z_s|^2 ds] < \infty$.

Démonstration

On considère l'EDSR simple

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où les hypothèses (H1)-(H2) sont satisfaites.

Étape 1 : Construction par itérations de Picard

On définit la suite (Y^n, Z^n) de Picard comme suit :

$$Y_t^0 = 0, \quad Z_t^0 = 0.$$

Ayant construit (Y^n, Z^n) , on définit (Y^{n+1}, Z^{n+1}) comme la solution de

$$Y_t^{n+1} = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds - \int_t^T Z_s^{n+1} dW_s.$$

À chaque étape, l'équation est linéaire en (Y^{n+1}, Z^{n+1}) , ce qui garantit l'existence et l'unicité de la solution.

Étape 2 : Estimation d'énergie

On part de l'équation de Picard :

$$Y_t^{n+1} = \xi + \int_t^T f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds - \int_t^T Z_s^{n+1} dW_s.$$

Application de la formule d'Itô Pour Y^{n+1} , on a :

$$dY_t^{n+1} = -f(t, Y_t^n, Z_t^n) dt + Z_t^{n+1} dW_t, \quad d\langle Y^{n+1} \rangle_t = |Z_t^{n+1}|^2 dt.$$

La formule d'Itô donne alors :

$$d|Y_t^{n+1}|^2 = 2Y_t^{n+1} dY_t^{n+1} + d\langle Y^{n+1} \rangle_t = -2Y_t^{n+1} f(t, Y_t^n, Z_t^n) dt + 2Y_t^{n+1} Z_t^{n+1} dW_t + |Z_t^{n+1}|^2 dt.$$

En intégrant de t à T :

$$|Y_t^{n+1}|^2 + \int_t^T |Z_s^{n+1}|^2 ds = |\xi|^2 + 2 \int_t^T Y_s^{n+1} f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds - 2 \int_t^T Y_s^{n+1} Z_s^{n+1} dW_s.$$

Prise de l'espérance Comme l'intégrale stochastique a une espérance nulle :

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T Y_s^{n+1} Z_s^{n+1} dW_s \right] = 0,$$

on obtient :

$$\mathbb{E}[|Y_t^{n+1}|^2] + \mathbb{E} \left[\int_t^T |Z_s^{n+1}|^2 ds \right] = \mathbb{E}[|\xi|^2] + 2\mathbb{E} \left[\int_t^T Y_s^{n+1} f(s, Y_s^n, Z_s^n) ds \right].$$

Estimation du terme $Y^{n+1}f$ On utilise la condition de Lipschitz de f :

$$|f(s, Y_s^n, Z_s^n)| \leq |f(s, 0, 0)| + L(|Y_s^n| + |Z_s^n|),$$

et l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$:

$$2|Y_s^{n+1}f(s, Y_s^n, Z_s^n)| \leq |Y_s^{n+1}|^2 + |f(s, 0, 0)|^2 + L(|Y_s^{n+1}|^2 + |Y_s^n|^2 + |Z_s^n|^2).$$

Conclusion Il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^{n+1}|^2\right] + \mathbb{E}\left[\int_0^T |Z_s^{n+1}|^2 ds\right] \leq C\left(\mathbb{E}[|\xi|^2] + \mathbb{E}\int_0^T |f(s, 0, 0)|^2 ds + \mathbb{E}\left[\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_t^n|^2 + \int_0^T |Z_s^n|^2 ds\right]\right).$$

Par récurrence, la suite (Y^n, Z^n) est donc bornée dans $S^2 \times H^2$.

Étape 3 : Convergence de la suite de Picard

On considère les différences entre deux itérations consécutives :

$$\Delta Y_t^{n+1} := Y_t^{n+1} - Y_t^n, \quad \Delta Z_t^{n+1} := Z_t^{n+1} - Z_t^n.$$

À partir de l'équation de Picard, on a :

$$\Delta Y_t^{n+1} = \int_t^T \left(f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1})\right) ds - \int_t^T \Delta Z_s^{n+1} dW_s.$$

Application de la formule d'Itô En appliquant la formule d'Itô à $|\Delta Y_t^{n+1}|^2$, on obtient :

$$|\Delta Y_t^{n+1}|^2 + \int_t^T |\Delta Z_s^{n+1}|^2 ds = 2 \int_t^T \Delta Y_s^{n+1} \left(f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1})\right) ds - 2 \int_t^T \Delta Y_s^{n+1} \Delta Z_s^{n+1} dW_s.$$

En prenant l'espérance, le terme stochastique disparaît :

$$\mathbb{E}[|\Delta Y_t^{n+1}|^2] + \mathbb{E}\int_t^T |\Delta Z_s^{n+1}|^2 ds = 2 \mathbb{E}\int_t^T \Delta Y_s^{n+1} \left(f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1})\right) ds.$$

Estimation du terme non linéaire On applique d'abord l'inégalité élémentaire

$$2ab \leq a^2 + b^2,$$

avec

$$a = |\Delta Y_s^{n+1}|, \quad b = |f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1})|.$$

On obtient alors :

$$2|\Delta Y_s^{n+1}| |f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1})| \leq |\Delta Y_s^{n+1}|^2 + |f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1})|^2.$$

On utilise ensuite la condition de Lipschitz sur f :

$$|f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1})| \leq L(|\Delta Y_s^n| + |\Delta Z_s^n|),$$

d'où

$$|f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1})|^2 \leq 2L^2(|\Delta Y_s^n|^2 + |\Delta Z_s^n|^2).$$

Ainsi,

$$2\Delta Y_s^{n+1} \left(f(s, Y_s^n, Z_s^n) - f(s, Y_s^{n-1}, Z_s^{n-1})\right) \leq |\Delta Y_s^{n+1}|^2 + 2L^2(|\Delta Y_s^n|^2 + |\Delta Z_s^n|^2).$$

Estimation finale En injectant cette majoration dans l'égalité précédente, puis en intégrant, on obtient :

$$\mathbb{E}[|\Delta Y_t^{n+1}|^2] + \mathbb{E} \int_t^T |\Delta Z_s^{n+1}|^2 ds \leq \mathbb{E} \int_t^T |\Delta Y_s^n|^2 ds + 2L^2 \mathbb{E} \int_t^T (|\Delta Y_s^n|^2 + |\Delta Z_s^n|^2) ds.$$

En utilisant ensuite l'inégalité de Gronwall et les inégalités classiques (Doob, BDG), on en déduit qu'il existe une constante $C > 0$ telle que :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\Delta Y_t^{n+1}|^2 \right] + \mathbb{E} \int_0^T |\Delta Z_s^{n+1}|^2 ds \leq CL^2 \left(\mathbb{E} \left[\sup_{0 \leq t \leq T} |\Delta Y_t^n|^2 \right] + \mathbb{E} \int_0^T |\Delta Z_s^n|^2 ds \right).$$

Ainsi, si $CL^2 < 1$, la suite (Y^n, Z^n) est contractante dans $S^2 \times H^2$, et converge vers une limite (Y, Z) .

Étape 4 : Passage à la limite

En passant à la limite dans l'égalité définissant (Y^{n+1}, Z^{n+1}) , on obtient pour tout t :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s.$$

Le couple (Y, Z) est donc solution de l'EDSR.

Étape 5 : Unicité

Soient (Y, Z) et (\tilde{Y}, \tilde{Z}) deux solutions de l'EDSR :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s dW_s, \quad \tilde{Y}_t = \xi + \int_t^T f(s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s) ds - \int_t^T \tilde{Z}_s dW_s.$$

On pose les différences :

$$\hat{Y}_t := Y_t - \tilde{Y}_t, \quad \hat{Z}_t := Z_t - \tilde{Z}_t.$$

Alors \hat{Y} et \hat{Z} satisfont :

$$\hat{Y}_t = \int_t^T (f(s, Y_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s)) ds - \int_t^T \hat{Z}_s dW_s.$$

Application de la formule d'Itô Pour le processus \hat{Y} , on a :

$$d\hat{Y}_t = -(f(t, Y_t, Z_t) - f(t, \tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t)) dt + \hat{Z}_t dW_t, \quad d\langle \hat{Y} \rangle_t = |\hat{Z}_t|^2 dt.$$

La formule d'Itô appliquée à $|\hat{Y}_t|^2$ donne :

$$d|\hat{Y}_t|^2 = 2\hat{Y}_t d\hat{Y}_t + d\langle \hat{Y} \rangle_t = -2\hat{Y}_t (f(t, Y_t, Z_t) - f(t, \tilde{Y}_t, \tilde{Z}_t)) dt + 2\hat{Y}_t \hat{Z}_t dW_t + |\hat{Z}_t|^2 dt.$$

En intégrant de t à T :

$$|\hat{Y}_t|^2 + \int_t^T |\hat{Z}_s|^2 ds = 2 \int_t^T \hat{Y}_s (f(s, Y_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s)) ds - 2 \int_t^T \hat{Y}_s \hat{Z}_s dW_s.$$

Prise de l'espérance L'espérance de l'intégrale stochastique est nulle :

$$\mathbb{E}\left[\int_t^T \hat{Y}_s \hat{Z}_s dW_s\right] = 0,$$

donc :

$$\mathbb{E}[|\hat{Y}_t|^2] + \mathbb{E} \int_t^T |\hat{Z}_s|^2 ds = 2 \mathbb{E} \int_t^T \hat{Y}_s (f(s, Y_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s)) ds.$$

Utilisation de la condition de Lipschitz Si f est Lipschitz en (y, z) , il existe $L > 0$ tel que

$$|f(s, Y_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s)| \leq L(|\hat{Y}_s| + |\hat{Z}_s|).$$

Ainsi :

$$2|\hat{Y}_s(f(s, Y_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s))| \leq 2L|\hat{Y}_s|(|\hat{Y}_s| + |\hat{Z}_s|) \leq 2L(|\hat{Y}_s|^2 + |\hat{Y}_s||\hat{Z}_s|).$$

En utilisant l'inégalité $2ab \leq a^2 + b^2$ pour $|\hat{Y}_s||\hat{Z}_s|$:

$$2L|\hat{Y}_s||\hat{Z}_s| \leq L(|\hat{Y}_s|^2 + |\hat{Z}_s|^2),$$

on obtient finalement :

$$2|\hat{Y}_s(f(s, Y_s, Z_s) - f(s, \tilde{Y}_s, \tilde{Z}_s))| \leq CL(|\hat{Y}_s|^2 + |\hat{Z}_s|^2),$$

pour une constante $C > 0$.

Conclusion via Grönwall Ainsi :

$$\mathbb{E}[|\hat{Y}_t|^2] + \mathbb{E} \int_t^T |\hat{Z}_s|^2 ds \leq CL \mathbb{E} \int_t^T (|\hat{Y}_s|^2 + |\hat{Z}_s|^2) ds.$$

Par le lemme de Grönwall, on obtient

$$\hat{Y}_t = 0, \quad \hat{Z}_t = 0, \quad \text{p.s.}$$

Ainsi, la solution de l'EDSR est unique.

2.2 Espérance quasi-conditionnelle

La nature non markovienne et anticipative du mouvement brownien fractionnaire B^H rend l'étude des espérances conditionnelles classiques délicate, voire inadaptée dans certains contextes. Pour pallier ces difficultés, [6] on introduit la notion d'espérance quasi-conditionnelle, qui généralise l'idée d'espérance conditionnelle classique tout en étant adaptée à la structure particulière de B^H .

1. Motivation. Dans le cadre du mBf, la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ n'est pas adaptée au calcul stochastique classique : le processus B^H n'est pas une martingale, ses accroissements ne sont pas indépendants, et l'espérance conditionnelle usuelle ne permet pas d'obtenir les relations de projection nécessaires à la résolution des EDSR. L'espérance quasi-conditionnelle est ainsi introduite pour remplacer l'espérance conditionnelle classique, de manière compatible avec la structure du mBf et le calcul de Malliavin.

2. Interprétation. L'espérance quasi-conditionnelle peut être interprétée comme une projection orthogonale dans l'espace de Wiener associé au mBf. Il s'agit d'une opération analogue à l'espérance conditionnelle classique, mais adaptée à la structure de dépendance des accroissements du mBf et aux intégrales de Skorohod.

2.2.1 Définition

Soit $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$ la filtration naturelle associée au mouvement brownien fractionnaire B^H , c'est-à-dire l'information disponible jusqu'au temps t .

Pour une variable aléatoire $F \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ dérivable, on définit l'espérance quasi-conditionnelle de F par rapport à \mathcal{F}_t comme suit :

$$\hat{\mathbb{E}}[F | \mathcal{F}_t] := \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n \cdot \mathbf{1}_{[0, t]}^{\otimes n}),$$

où :

— La décomposition en chaos de Wiener de F est donnée par

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} I_n(f_n),$$

avec I_n l'intégrale multiple de Wiener d'ordre n , et $f_n \in \mathcal{H}^{\otimes n}$ un noyau symétrique.

— L'intégrale multiple de Wiener $I_n(f_n)$ est définie par

$$I_n(f_n) := n! \int_{0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n \leq T} f_n(t_1, \dots, t_n) dB_{t_1}^H \dots dB_{t_n}^H.$$

— La fonction indicatrice $\mathbf{1}_{[0, t]}^{\otimes n} : [0, T]^n \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par

$$\mathbf{1}_{[0, t]}^{\otimes n}(t_1, \dots, t_n) := \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{[0, t]}(t_i),$$

où

$$\mathbf{1}_{[0, t]}(s) := \begin{cases} 1, & \text{si } s \in [0, t], \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, l'espérance quasi-conditionnelle consiste à restreindre les noyaux f_n de la décomposition en chaos de Wiener à l'hypercube $[0, t]^n$.

2.2.2 Propriétés fondamentales

L'espérance quasi-conditionnelle, introduite pour les Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades (EDSR) pilotées par le Mouvement Brownien Fractionnaire (B^H), possède des propriétés distinctives.

— **Propriété d'Espérance quasi-conditionnelle Nulle pour l'Intégrale Stochastique Future (Lemme 3.3 de [6]) :**

L'espérance quasi-conditionnelle de l'intégrale stochastique future (par rapport à B^H) est nulle :

$$\hat{\mathbb{E}} \left[\int_t^T f_u dB_u^H \middle| \mathcal{F}_t \right] = 0$$

Différences avec l’Espérance Conditionnelle Classique

— **Manque de Monotonie Générale :**

La quasi-espérance conditionnelle **n’est pas monotone** en général. Il peut exister $\xi \geq 0$ presque sûrement telle que $\hat{\mathbb{E}}[\xi|\mathcal{F}_t] < 0$ avec une probabilité positive.

— **Manque de la Propriété de “Sortie” (Pull-out Property) :**

Elle ne satisfait pas la propriété classique $\mathbb{E}[FG|\mathcal{F}_t] = G\mathbb{E}[F|\mathcal{F}_t]$ lorsque G est \mathcal{F}_t -mesurable. En particulier :

$$\hat{\mathbb{E}}[B_t^H B_T^H|\mathcal{F}_t] \neq B_t^H \hat{\mathbb{E}}[B_T^H|\mathcal{F}_t]$$

— **Exemple de Non-Égalité (voir Hu et Peng [6]) :**

$$\hat{\mathbb{E}}[B_t^H B_T^H|\mathcal{F}_t] = (B_t^H)^2 + \int_0^t \int_t^T \phi(u, v) du dv$$

où $\phi(u, v) = H(2H - 1)|u - v|^{2H-2}$ est la fonction noyau associée au MBF. Ce terme additionnel montre que :

$$\hat{\mathbb{E}}[B_t^H B_T^H|\mathcal{F}_t] \neq B_t^H \hat{\mathbb{E}}[B_T^H|\mathcal{F}_t] = (B_t^H)^2$$

Propriétés sur un Sous-Ensemble

— **Monotonie sur le Sous-Ensemble Gaussien (Théorème 3.8 de [6]) :**

Elle est **monotone** pour les variables aléatoires de la forme $F = f(\eta_T)$ et $G = g(\eta_T)$, où $\eta_t = \int_0^t \sigma_s dB_s^H$ et $\|\sigma\|_t^2$ est strictement croissante. Si $F \geq G$ p.s., alors $\hat{\mathbb{E}}[F|\mathcal{F}_t] \geq \hat{\mathbb{E}}[G|\mathcal{F}_t]$.

— **Inégalité de Type Jensen (Remarque 3.10 de [6]) :**

Une **inégalité de type Jensen** est vérifiée sur ce même sous-ensemble pour $p \in [1, \infty)$:

$$\mathbb{E}|\hat{\mathbb{E}}[G|\mathcal{F}_t]|^p \leq \mathbb{E}|G|^p$$

2.2.3 Approfondissements sur la quasi-espérance conditionnelle

1. Compatibilité avec la représentation fractionnaire Si l’on considère la représentation de Mandelbrot–Van Ness du mouvement brownien fractionnaire B^H :

$$B_t^H = \int_0^t K_H(t, s) dW_s,$$

où W est un brownien standard et K_H le noyau fractionnaire approprié, alors la quasi-espérance conditionnelle peut s’exprimer à l’aide d’un opérateur de transformation T_t^H lié au noyau K_H .

Pour une trajectoire ω , T_t^H agit de la manière suivante :

$$(T_t^H \omega)(s) := \begin{cases} \omega(s), & s \leq t, \\ \omega(t) + \int_0^t (K_H(s, r) - K_H(t, r)) dW_r(\omega), & s > t, \end{cases}$$

ce qui « gèle » la trajectoire après le temps t de façon cohérente avec l'information disponible jusqu'à t .

Ainsi, la quasi-espérance conditionnelle s'écrit

$$\widehat{\mathbb{E}}[F | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[F \circ T_t^H],$$

montrant son adéquation avec le mouvement brownien fractionnaire.

2. Relation avec l'intégrale de Skorohod. Pour un processus u tel que l'intégrale de Skorohod $\delta(u)$ existe, Hu et Peng montrent que

$$\widehat{\mathbb{E}}[\delta(u) | \mathcal{F}_t] = \delta(u \mathbf{1}_{[0,t]}) + \int_t^T \widehat{\mathbb{E}}[D_s \delta(u) | \mathcal{F}_t] ds, \quad (2.2)$$

Cette relation joue un rôle fondamental dans la représentation des solutions des EDSR.

3. Application aux EDSR. Grâce à la quasi-espérance conditionnelle, les EDSR dirigées par un mBf s'écrivent sous la forme

$$Y_t = \widehat{\mathbb{E}} \left[\xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad (2.3)$$

formulation indispensable en l'absence de propriété martingale. La quasi-espérance permet ainsi de garantir l'existence et l'unicité de la solution, tout en rendant possible l'identification du terme Z .

2.3 EDSR dirigées par un Mouvement Brownien Fractionnaire

Les équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) dirigées par un mouvement brownien fractionnaire (mBf) sont essentielles pour modéliser des systèmes dynamiques avec mémoire longue. Le mBf d'indice de Hurst $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ introduit une dépendance temporelle non locale, que les méthodes classiques de l'intégrale stochastique ne peuvent traiter directement.

La dérivée de Malliavin et l'espérance quasi-conditionnelle sont utilisées pour définir les solutions (Y, Z) de manière rigoureuse. Le théorème du point fixe de Banach garantit l'existence et l'unicité pour les EDSR non linéaires. Ce chapitre détaille ces résultats pour les cas linéaire et non linéaire.

2.3.1 Cas linéaire

Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles. On considère $B^H = (B_t^H)_{t \in [0, T]}$, un **mouvement brownien fractionnaire (mBf)** de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$.

Définition 2

Une **EDSR linéaire dirigée par le mBf** est une équation de la forme :

$$Y_t = \xi + \int_t^T (A_s Y_s + B_s Z_s + C_s) ds - \int_t^T Z_s \delta B_s^H, \quad t \in [0, T]. \quad (2.4)$$

où :

- . ξ est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable représentant la condition terminale.
- . A_s, B_s et C_s sont des processus adaptés et intégrables.
- . Z est un processus adapté tel que l'intégrale de Skorohod $\int_t^T Z_s \delta B_s^H$ soit bien définie.
- . δB^H désigne l'intégrale stochastique au sens de Skorohod par rapport au mBf.

Remarques 1

- Cette équation est dite **linéaire** car le générateur $f(s, Y_s, Z_s) = A_s Y_s + B_s Z_s + C_s$ est affine en (Y_s, Z_s) .
- Lorsque $H = \frac{1}{2}$, le mBf coïncide avec un mouvement brownien standard, et l'équation se réduit à une EDSR linéaire standard (dirigée par un mouvement brownien de Wiener).
- L'intégrale stochastique par rapport au mBf est ici définie au sens de Skorohod, ce qui permet de traiter des processus anticipatifs et de gérer la régularité particulière liée au paramètre de Hurst H .

Définition 2 [EDSR linéaire]

Un couple de processus (Y, Z) est appelé **solution** de l'EDSR linéaire dirigée par un mBf si, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$Y_t = \xi + \int_t^T (A_s Y_s + B_s Z_s + C_s) ds - \int_t^T Z_s \delta B_s^H, \quad (2.5)$$

où :

- $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ est la condition terminale.
- A_s et B_s sont des processus bornés et adaptés.
- C_s est un processus adapté tel que $C \in L^2_{\mathcal{F}}(0, T)$.
- Z est un processus adapté de sorte que l'intégrale stochastique au sens de Skorohod $\int_t^T Z_s \delta B_s^H$ soit bien définie.

La proposition ci-dessous de Hu et Peng [6] nous donne la représentation via l'espérance quasi-conditionnelle

Proposition 1 (Représentation d'une solution de l'EDSR linéaire dirigée par un mBf)

Soit (Y, Z) une solution de l'équation différentielle stochastique rétrograde linéaire dirigée par un mouvement brownien fractionnaire B^H , de la forme

$$Y_t = \xi + \int_t^T (A_s X_s + B_s Y_s + C_s) ds - \int_t^T Z_s \delta B_s^H, \quad t \in [0, T],$$

où δB^H désigne l'intégrale de Skorohod par rapport à B^H .

Alors, pour tout $t \in [0, T]$, (Y_t, Z_t) admet la représentation suivante en termes de quasi-espérance conditionnelle :

$$\begin{cases} Y_t = \widehat{\mathbb{E}}\left[\xi + \int_t^T C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] + \int_t^T \widehat{\mathbb{E}}[A_s X_s + B_s Y_s \mid \mathcal{F}_t] ds, \\ Z_t = D_t Y_t, \end{cases} \quad (2.6)$$

où D_t désigne la dérivée de Malliavin du processus Y et $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ est la quasi-espérance conditionnelle jusqu'au temps t .

Démonstration

Soit (Y, Z) une solution de l'EDSR linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T (A_s X_s + B_s Y_s + C_s) ds - \int_t^T Z_s \delta B_s^H, \quad t \in [0, T],$$

où δB_s^H est l'intégrale de Skorohod par rapport au mouvement brownien fractionnaire B^H .

Étape 1 : Application de l'espérance quasi-conditionnelle On applique la quasi-espérance conditionnelle $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ des deux côtés de l'équation. Rappelons que $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ est un opérateur linéaire et que pour toute intégrale de Skorohod future :

$$\widehat{\mathbb{E}}\left[\int_t^T Z_s \delta B_s^H \mid \mathcal{F}_t\right] = 0.$$

Ainsi, en prenant la quasi-espérance conditionnelle :

$$\widehat{\mathbb{E}}[Y_t \mid \mathcal{F}_t] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\xi + \int_t^T (A_s X_s + B_s Y_s + C_s) ds \mid \mathcal{F}_t\right].$$

On peut séparer les termes dépendant de Y et ceux indépendants :

$$\widehat{\mathbb{E}}[Y_t \mid \mathcal{F}_t] = \widehat{\mathbb{E}}\left[\xi + \int_t^T C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] + \int_t^T \widehat{\mathbb{E}}[A_s X_s + B_s Y_s \mid \mathcal{F}_t] ds.$$

Ceci donne exactement la représentation du processus Y_t dans (2.6).

Étape 2 : Expression de Z_t via la dérivée de Malliavin Rappelons le lien fondamental entre l'intégrale de Skorohod et la dérivée de Malliavin : si $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ (l'espace des fonctionnelles de Malliavin), alors la représentation de Clark–Ocone fractionnaire (Hu & Peng, 2009) donne :

$$Y_t = \widehat{\mathbb{E}}[Y_t | \mathcal{F}_t] + \int_t^T D_s Y_s \delta B_s^H,$$

où $D_s Y_s$ est la dérivée de Malliavin de Y .

En identifiant avec l'EDSR initiale, on en déduit :

$$Z_t = D_t Y_t.$$

Étape 3 : Vérification - La linéarité de $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ assure que la représentation est bien définie. - L'égalité $Z_t = D_t Y_t$ garantit que l'intégrale de Skorohod est correctement représentée en termes de Malliavin. - Pour $H = 1/2$, $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot | \mathcal{F}_t]$ coïncide avec l'espérance conditionnelle classique, et la formule se réduit à la représentation standard des EDSR linéaires classiques.

Conclusion Ainsi, toute solution (Y, Z) de l'EDSR linéaire dirigée par un mBf admet bien la représentation

$$\begin{cases} Y_t = \widehat{\mathbb{E}}\left[\xi + \int_t^T C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right] + \int_t^T \widehat{\mathbb{E}}[A_s X_s + B_s Y_s \mid \mathcal{F}_t] ds, \\ Z_t = D_t Y_t, \end{cases}$$

comme annoncé dans la proposition.

Inégalité de Gronwall fractionnaire

Théorème 1

Soit $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Supposons qu'il existe des constantes $C > 0$, $K > 0$ et un paramètre $0 < \alpha < 1$ tels que, pour tout $t \in [0, T]$,

$$u(t) \leq C + K \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds.$$

Alors, pour tout $t \in [0, T]$, on a

$$u(t) \leq C E_\alpha(K t^\alpha),$$

où E_α est la fonction de Mittag–Leffler définie par

$$E_\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Démonstration

On commence par remarquer que, pour $0 < \alpha < 1$, l'opérateur

$$(I^\alpha f)(t) := \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s) ds$$

correspond à l'intégrale fractionnaire de Riemann–Liouville d'ordre α .

L'inégalité hypothèse peut alors s'écrire sous la forme

$$u(t) \leq C + K\Gamma(\alpha)(I^\alpha u)(t).$$

Introduisons l'opérateur linéaire

$$(\mathcal{T}u)(t) := K \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds.$$

L'inégalité précédente devient

$$u \leq C + \mathcal{T}u. \quad (1)$$

Étape 1 : Itération de l'inégalité.

En réinjectant l'inégalité (1) dans le membre de droite, on obtient

$$u \leq C + \mathcal{T}(C + \mathcal{T}u) = C + C\mathcal{T}\mathbf{1} + \mathcal{T}^2u,$$

où $\mathbf{1}(t) \equiv 1$. Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(t) \leq C \sum_{k=0}^n \mathcal{T}^k \mathbf{1}(t) + \mathcal{T}^{n+1} u(t). \quad (2)$$

Étape 2 : Calcul explicite de $\mathcal{T}^k \mathbf{1}$.

On montre par récurrence que

$$\mathcal{T}^k \mathbf{1}(t) = K^k \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} t^{k\alpha}, \quad k \geq 0.$$

En effet, pour $k = 0$, le résultat est immédiat. Supposons la formule vraie pour un certain k . Alors

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{k+1} \mathbf{1}(t) &= K \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} s^{k\alpha} ds \\ &= K \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} t^{(k+1)\alpha} \int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{k\alpha} dr. \end{aligned}$$

Or,

$$\int_0^1 (1-r)^{\alpha-1} r^{k\alpha} dr = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k\alpha + 1)}{\Gamma((k+1)\alpha + 1)}.$$

D'où

$$\mathcal{T}^{k+1} \mathbf{1}(t) = K^{k+1} \frac{\Gamma(\alpha)^{k+1}}{\Gamma((k+1)\alpha + 1)} t^{(k+1)\alpha}.$$

Étape 3 : Passage à la limite.

La continuité et la positivité de u impliquent que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{T}^{n+1} u(t) = 0, \quad \text{uniformément sur } [0, T].$$

En faisant tendre $n \rightarrow \infty$ dans (2), on obtient

$$u(t) \leq C \sum_{k=0}^{\infty} K^k \frac{\Gamma(\alpha)^k}{\Gamma(k\alpha + 1)} t^{k\alpha}.$$

Étape 4 : Fonction de Mittag–Leffler.

En absorbant le facteur $\Gamma(\alpha)$ dans la constante K , on reconnaît la série de la fonction de Mittag–Leffler :

$$u(t) \leq C \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Kt^\alpha)^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = C E_\alpha(Kt^\alpha).$$

Cela conclut la démonstration.

Existence et Unicité des solutions

Dans cette partie, nous étudions le problème d'existence et d'unicité des solutions de l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) linéaire dirigée par un mouvement brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t \in [0, T]}$ de paramètre de Hurst $H > \frac{1}{2}$. Notre analyse repose principalement sur les résultats obtenus par [6].

Hypothèses de travail

On considère les hypothèses suivantes sur les coefficients et les données de l'EDSR linéaire :

- (L1) A_s et B_s sont des processus adaptés et bornés ;
- (L2) C_s est un processus adapté, *carré intégrable*, c'est-à-dire

$$\mathbb{E} \left[\int_0^T |C_s|^2 ds \right] < \infty;$$

- (L3) $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ est la condition terminale de l'EDSR ;
- (L4) δB_s^H désigne l'intégrale stochastique au sens de Skorohod par rapport au mouvement brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t \in [0, T]}$.
- (L5) Le paramètre de Hurst H satisfait $H > 1/2$, correspondant au cas où le mouvement brownien fractionnaire possède des trajectoires à variation finie .

Énoncé du problème

On considère l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) linéaire suivante :

$$Y_t = \xi + \int_t^T (A_s Y_s + B_s Z_s + C_s) ds - \int_t^T Z_s \delta B_s^H, \quad t \in [0, T], \quad (2.7)$$

et on cherche un couple de processus (Y_t, Z_t) adapté à la filtration naturelle de B^H qui soit solution de l'équation (2.7).

Lemme préparatoire

Lemme 1 (Estimation a priori et inégalité de Gronwall fractionnaire).

Soit (Y, Z) une solution de l'EDSR linéaire (2.7). Il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement des bornes des coefficients A et B , telle que pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |Y_s|^2 \right] + \int_0^t \mathbb{E}[|Z_s|^2] ds \leq C \left(\mathbb{E}[|\xi|^2] + \int_0^t \mathbb{E}[|C_s|^2] ds \right) \\ + C \int_0^t (t-s)^{2H-1} \mathbb{E} \left[\sup_{r \in [0, s]} |Y_r|^2 \right] ds. \end{aligned}$$

En appliquant une inégalité de Gronwall de type fractionnaire, on obtient l'estimation globale suivante :

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |Y_t|^2 \right] + \int_0^T \mathbb{E}[|Z_s|^2] ds \leq C' \left(\mathbb{E}[|\xi|^2] + \int_0^T \mathbb{E}[|C_s|^2] ds \right),$$

où la constante $C' > 0$ dépend uniquement de H , de T et des bornes des coefficients A et B .

Démonstration

Soit (Y, Z) une solution de l'EDSR linéaire (2.7). Nous établissons une estimation a priori sur Y et Z en plusieurs étapes.

Étape 1 : Application de la formule d'Itô fractionnaire.

Contrairement au cas brownien classique, le mouvement brownien fractionnaire B^H (pour $H \neq \frac{1}{2}$) n'est pas une semi-martingale. L'intégrale stochastique est donc considérée au sens de Skorohod, et l'on utilise la formule d'Itô fractionnaire développée dans [6].

Sous les hypothèses (L1)–(L5), en particulier :

$$Y \in \mathbb{D}^{1,2}, \quad Z \in L^2(\Omega \times [0, T]),$$

la formule d'Itô fractionnaire appliquée à la fonction $\varphi(x) = |x|^2$ donne, pour tout $t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned} |Y_t|^2 = |\xi|^2 + 2 \int_t^T \langle Y_s, A_s Y_s + B_s Z_s + C_s \rangle ds \\ - 2 \int_t^T \langle Y_s, Z_s \delta B_s^H \rangle - \int_t^T |Z_s|^2 ds. \end{aligned} \tag{2.8}$$

En réarrangeant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned} |Y_t|^2 + \int_t^T |Z_s|^2 ds = |\xi|^2 + 2 \int_t^T \langle Y_s, A_s Y_s + B_s Z_s + C_s \rangle ds \\ - 2 \int_t^T \langle Y_s, Z_s \delta B_s^H \rangle \end{aligned} \tag{2.9}$$

Étape 2 : Estimation des termes déterministes.

Les processus A et B étant uniformément bornés, il existe des constantes $a, b > 0$ telles que

$$|A_s| \leq a, \quad |B_s| \leq b, \quad \forall s \in [0, T].$$

À l'aide des inégalités de Cauchy–Schwarz et de Young, pour tout $\varepsilon > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} 2\langle Y_s, A_s Y_s \rangle &\leq 2a|Y_s|^2, \\ 2\langle Y_s, B_s Z_s \rangle &\leq \varepsilon|Z_s|^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}|Y_s|^2, \\ 2\langle Y_s, C_s \rangle &\leq |Y_s|^2 + |C_s|^2. \end{aligned}$$

En intégrant sur $[t, T]$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$2 \int_t^T \langle Y_s, A_s Y_s + B_s Z_s + C_s \rangle ds \leq C \int_t^T |Y_s|^2 ds + \varepsilon \int_t^T |Z_s|^2 ds + \int_t^T |C_s|^2 ds. \quad (2.10)$$

Étape 3 : Estimation du terme stochastique fractionnaire Le terme stochastique

$$\int_t^T \langle Y_s, Z_s \rangle \delta B_s^H$$

n'est pas une martingale au sens classique, puisque le mouvement brownien fractionnaire B^H n'est pas une semi-martingale lorsque $H \neq \frac{1}{2}$. L'estimation de ce terme repose donc sur les propriétés de l'intégrale de Skorohod et sur la structure du noyau de covariance du mBf.

Dans le cadre du calcul de Malliavin, pour tout processus u appartenant au domaine de l'opérateur de divergence δ , il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_t^T u_s \delta B_s^H \right| \right] \leq C \mathbb{E} \int_0^T \int_0^T |u_s| |u_r| |s - r|^{2H-2} dr ds.$$

En appliquant cette inégalité au processus $u_s = \langle Y_s, Z_s \rangle$, on obtient

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_t^T \langle Y_s, Z_s \rangle \delta B_s^H \right| \right] \leq C \mathbb{E} \int_0^T \int_0^T |Y_s| |Z_s| |Z_r| |s - r|^{2H-2} dr ds. \quad (2.11)$$

Traitement de l'intégrale double.

On traite maintenant le membre de droite de (2.11). Fixons $s \in [0, T]$. En appliquant l'inégalité de Cauchy–Schwarz par rapport à la variable r , on obtient

$$\int_0^T |Z_r| |s - r|^{2H-2} dr \leq \left(\int_0^T |Z_r|^2 dr \right)^{1/2} \left(\int_0^T |s - r|^{2(2H-2)} dr \right)^{1/2}.$$

Comme $H \in (\frac{1}{2}, 1)$, on a $2(2H - 2) = 4H - 4 \in (-2, 0)$, et donc

$$\int_0^T |s - r|^{4H-4} dr = \int_0^s (s - r)^{4H-4} dr + \int_s^T (r - s)^{4H-4} dr \leq C(T - s)^{4H-3}.$$

Il s'ensuit que

$$\int_0^T |Z_r| |s - r|^{2H-2} dr \leq C(T - s)^{2H-\frac{3}{2}} \left(\int_0^T |Z_r|^2 dr \right)^{1/2}.$$

En reportant cette estimation dans (2.11), on obtient

$$\mathbb{E} \int_0^T \int_0^T |Y_s| |Z_s| |Z_r| |s-r|^{2H-2} dr ds \leq C \mathbb{E} \int_0^T |Y_s| |Z_s| (T-s)^{2H-\frac{3}{2}} \left(\int_0^T |Z_r|^2 dr \right)^{1/2} ds.$$

Application de l'inégalité de Young.

On applique l'inégalité de Young sous la forme

$$ab \leq \varepsilon a^2 + C_\varepsilon b^2,$$

avec

$$a = |Z_s|, \quad b = |Y_s| (T-s)^{2H-\frac{3}{2}} \left(\int_0^T |Z_r|^2 dr \right)^{1/2}.$$

Il vient alors

$$|Y_s| |Z_s| (T-s)^{2H-\frac{3}{2}} \left(\int_0^T |Z_r|^2 dr \right)^{1/2} \leq \varepsilon |Z_s|^2 + C |Y_s|^2 (T-s)^{2H-1} \int_0^T |Z_r|^2 dr.$$

En intégrant sur $[0, T]$ et en prenant l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_t^T \langle Y_s, Z_s \rangle \delta B_s^H \right| \right] &\leq \varepsilon \mathbb{E} \int_0^T |Z_s|^2 ds \\ &\quad + C \int_0^T (T-s)^{2H-1} \mathbb{E} \left[\sup_{r \in [s, T]} |Y_r|^2 \right] ds. \end{aligned}$$

En choisissant $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient l'estimation finale

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} \left| \int_t^T \langle Y_s, Z_s \rangle \delta B_s^H \right| \right] \leq \frac{1}{2} \mathbb{E} \int_0^T |Z_s|^2 ds + C \int_0^T (T-s)^{2H-1} \mathbb{E} \left[\sup_{r \in [s, T]} |Y_r|^2 \right] ds. \quad (2.12)$$

Étape 4 : Inégalité intégrale.

En combinant les estimations obtenues :

- (2.9) : estimation déterministe de Y et Z ,
- (2.10) : terme intégral lié au drift,
- (2.12) : estimation de l'intégrale de Skorohod,

et en prenant l'espérance ainsi que le supremum sur $[t, T]$, on obtient l'inégalité clé :

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\sup_{r \in [t, T]} |Y_r|^2 \right] + \mathbb{E} \int_t^T |Z_s|^2 ds &\leq C \left(\mathbb{E} [|\xi|^2] + \mathbb{E} \int_t^T |C_s|^2 ds \right) \\ &\quad + C \int_t^T (s-t)^{2H-1} \mathbb{E} \left[\sup_{r \in [s, T]} |Y_r|^2 \right] ds, \end{aligned} \quad (2.13)$$

où $C > 0$ est une constante dépendant uniquement de H et des constantes Lipschitz des coefficients.

Étape 5 : Application de l'inégalité de Gronwall fractionnaire.

Comme $2H - 1 \in (0, 1)$, on peut appliquer le lemme de Gronwall fractionnaire. Il existe alors une constante $C > 0$ telle que

$$\mathbb{E} \left[\sup_{t \in [0, T]} |Y_t|^2 \right] + \mathbb{E} \int_0^T |Z_s|^2 ds \leq C \left(\mathbb{E} [|\xi|^2] + \mathbb{E} \int_0^T |C_s|^2 ds \right). \quad (2.14)$$

Cette estimation fournit la borne a priori finale pour (Y, Z) et permet de conclure l'existence et l'unicité de la solution. \square

Théorème principal

Théorème 3 [Existence et unicité, [6]]

Sous les hypothèses L1–L5, l'équation différentielle stochastique rétrograde linéaire

$$Y_t = \xi + \int_t^T (A_s Y_s + B_s Z_s + C_s) ds - \int_t^T Z_s \delta B_s^H, \quad t \in [0, T], \quad (2.15)$$

admet une *solution unique* (Y, Z) dans l'espace $\mathcal{S}^2([0, T]) \times L^2(\Omega \times [0, T])$.

De plus, cette solution est donnée explicitement par

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} \widehat{\mathbb{E}} \left[\Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_s C_s ds \mid \mathcal{F}_t \right], \quad t \in [0, T], \quad (2.16)$$

où

$$\Gamma_t := \exp \left(\int_0^t A_s ds \right),$$

et $\widehat{\mathbb{E}}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ désigne l'espérance quasi-conditionnelle associée au mouvement brownien fractionnaire.

Enfin, le processus Z_t est déterminé par la *décomposition stochastique fractionnaire* du processus $\widetilde{Y}_t := \Gamma_t Y_t$.

Démonstration

Étape 1 : Changement de variable (facteur intégrant)

Posons :

$$\Gamma_t := \exp \left(\int_0^t A_s ds \right) \quad \text{et} \quad \widetilde{Y}_t := \Gamma_t Y_t.$$

Alors :

$$d\widetilde{Y}_t = -\Gamma_t (B_t Z_t + C_t) dt + \Gamma_t Z_t \delta B_t^H.$$

Intégration de t à T :

$$\widetilde{Y}_t = \Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_s (B_s Z_s + C_s) ds - \int_t^T \Gamma_s Z_s \delta B_s^H.$$

Étape 2 : Formule d'intégration par parties fractionnaire

Pour un indice de Hurst $H > \frac{1}{2}$, supposons que les processus F_t et G_t appartiennent à l'espace de Malliavin $\mathbb{D}^{1,2}$. Alors, d'après le Théorème 6, on dispose de la formule d'intégration par parties adaptée aux intégrales de Skorohod :

$$F_t G_t = F_0 G_0 + \int_0^t F_s \delta G_s + \int_0^t G_s \delta F_s + \int_0^t D_s^H F_s G_s ds. \quad (2.17)$$

En particulier, elle généralise la formule d'Itô classique au contexte des mouvements browniens fractionnaires et permet de travailler avec des EDSR où les coefficients peuvent être anticipatifs.

Étape 3 : Changement de mesure (Girsanov fractionnaire)

On définit $\widetilde{\mathbb{P}}$ par :

$$\frac{d\widetilde{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\int_0^T \theta_s dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \theta_s^2 ds\right),$$

où (W_s) est le Brownien standard associé à B^H et θ_s choisi pour éliminer $B_s Z_s$.

Sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, le processus

$$\widetilde{B}_t^H := B_t^H - \int_0^t \theta_s ds$$

est un mBf, et l'équation devient :

$$\widetilde{Y}_t = \Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_s C_s ds - \int_t^T \Gamma_s Z_s \delta \widetilde{B}_s^H.$$

Étape 4 : Solution via l'espérance quasi-conditionnelle

Comme

$$\widehat{\mathbb{E}}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\int_t^T \Gamma_s Z_s \delta \widetilde{B}_s^H \mid \mathcal{F}_t\right] = 0,$$

on obtient :

$$\widetilde{Y}_t = \widehat{\mathbb{E}}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_s C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right].$$

Étape 5 : Retour à la mesure initiale et identification de Z_t

En revenant à la variable originale $Y_t = \Gamma_t^{-1} \widetilde{Y}_t$, on obtient la solution de l'EDSR initiale sous sa forme explicite :

$$Y_t = \Gamma_t^{-1} \widehat{\mathbb{E}}^{\widetilde{\mathbb{P}}}\left[\Gamma_T \xi + \int_t^T \Gamma_s C_s ds \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t \in [0, T]. \quad (2.18)$$

Le processus Z_t est ensuite identifié à partir de la **décomposition stochastique fractionnaire** du processus \widetilde{Y}_t sous la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$:

$$\widetilde{Y}_t = \widehat{\mathbb{E}}^{\widetilde{\mathbb{P}}}[\widetilde{Y}_t] + \int_0^t Z_s \delta \widetilde{B}_s^H. \quad (2.19)$$

Cette dernière formule provient de l'analogie fractionnaire de la *décomposition de martingale* en probabilité classique. Sous la mesure $\widetilde{\mathbb{P}}$, le processus \widetilde{B}^H est un mouvement brownien fractionnaire et \widetilde{Y}_t est un processus Skorohod intégrable. La théorie de Malliavin assure alors que tout processus adapté dans $\mathbb{D}^{1,2}$ peut être représenté comme la somme de sa projection sur \mathcal{F}_t (ici l'espérance quasi-conditionnelle) et d'une intégrale de Skorohod fractionnaire.

Ainsi, Z_t apparaît naturellement comme le coefficient de l'intégrale de Skorohod dans cette décomposition et est unique dans l'espace $L^2(\Omega \times [0, T])$.

Étape 6 : Unicité

Considérons deux couples de solutions (Y, Z) et (Y', Z') satisfaisant l'EDSR linéaire (3.4).

Définition des différences :

$$\Delta Y_t := Y_t - Y'_t, \quad \Delta Z_t := Z_t - Z'_t.$$

Alors $(\Delta Y, \Delta Z)$ satisfait l'équation linéaire homogène (3.4) :

$$\Delta Y_t = \int_t^T (A_s \Delta Y_s + B_s \Delta Z_s) ds - \int_t^T \Delta Z_s \delta B_s^H. \quad (2.20)$$

6.1 Estimation a priori :

D'après le Lemme 1, il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |\Delta Y_s|^2 \right] + \int_0^t \mathbb{E}[|\Delta Z_s|^2] ds \leq C \int_0^t (t-s)^{2H-1} \mathbb{E} \left[\sup_{r \in [0, s]} |\Delta Y_r|^2 \right] ds.$$

Remarque : Cette inégalité contrôle simultanément la norme de ΔY et celle de ΔZ , grâce à la structure du mBf et aux propriétés de l'intégrale de Skorohod.

6.2 Application de l'inégalité de Gronwall fractionnaire :

On définit la fonction

$$u(t) := \mathbb{E} \left[\sup_{s \in [0, t]} |\Delta Y_s|^2 \right],$$

qui mesure la norme quadratique moyenne du processus ΔY sur l'intervalle $[0, t]$.

D'après le Lemme 1 (estimation a priori), la différence $(\Delta Y, \Delta Z)$ satisfait l'inégalité intégrale

$$u(t) + \int_0^t \mathbb{E}[|\Delta Z_s|^2] ds \leq C \int_0^t (t-s)^{2H-1} u(s) ds,$$

où $C > 0$ dépend des bornes des coefficients A et B et de l'indice de Hurst H .

En particulier, en négligeant le terme positif $\int_0^t \mathbb{E}[|\Delta Z_s|^2] ds \geq 0$, on obtient :

$$u(t) \leq C \int_0^t (t-s)^{2H-1} u(s) ds. \quad (2.21)$$

Application du lemme de Gronwall fractionnaire :

L'inégalité (2.21) correspond à la forme canonique du lemme de Gronwall fractionnaire pour un paramètre $\alpha = 2H - 1$ tel que $0 < \alpha < 1$. » :

$$u(t) \leq C \int_0^t (t-s)^\alpha u(s) ds.$$

D'après le théorème de Gronwall fractionnaire : si u est continue et non négative et satisfait

$$u(t) \leq C \int_0^t (t-s)^\alpha u(s) ds,$$

alors la seule solution possible est

$$u(t) \equiv 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Cette conclusion découle du fait que l'inégalité fractionnaire n'autorise aucune croissance strictement positive de $u(t)$: toute contribution initiale positive aurait été propagée via la convolution avec $(t-s)^\alpha$, mais ici la fonction initiale est nulle à $t = 0$.

6.3 Conclusion : Unicité de la solution

Puisque $u(t) \equiv 0$, on a

$$\Delta Y_t = Y_t - Y'_t \equiv 0 \quad \text{p.s. pour tout } t \in [0, T].$$

En remplaçant dans l'équation (3.7) pour ΔZ , on obtient :

$$\int_t^T \Delta Z_s \delta B_s^H = \int_t^T (A_s \Delta Y_s + B_s \Delta Z_s) ds = \int_t^T B_s \Delta Z_s ds,$$

car $\Delta Y_s \equiv 0$.

Comme les coefficients B_s sont bornés et $\int_t^T \Delta Z_s \delta B_s^H = 0$, il en résulte que

$$\Delta Z_t \equiv 0 \quad \text{p.s. pour tout } t \in [0, T].$$

Conclusion finale :

Ainsi, on a montré que

$$Y_t = Y'_t \quad \text{et} \quad Z_t = Z'_t \quad \text{p.s. pour tout } t \in [0, T],$$

Ce qui établit l'unicité de la solution de l'EDSR linéaire dirigée par un mouvement brownien fractionnaire.

2.3.2 Cas non linéaire

Définitions

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré satisfaisant les conditions usuelles. On considère $B^H = (B_t^H)_{t \in [0, T]}$, un **mouvement brownien fractionnaire (mBf)** de paramètre de Hurst $H \in (0, 1)$.

Définition 4

Une **équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) non linéaire dirigée par le mBf** est une équation de la forme :

$$Y_t = \xi + \int_t^T f(s, Y_s, Z_s) ds - \int_t^T Z_s \delta B_s^H, \quad t \in [0, T], \quad (2.22)$$

où :

- . ξ est une variable aléatoire \mathcal{F}_T -mesurable représentant la condition terminale.
- . $f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction **générateur** de l'EDSR.
- . Z est un processus adapté tel que l'intégrale stochastique avec le mBf soit bien définie (au sens de Skorohod ou de divergence).
- . δB^H désigne l'intégrale stochastique par rapport au mBf, qui diffère de l'intégrale d'Itô classique.

Remarque 2

- Si $H = \frac{1}{2}$, le mBf devient un mouvement brownien standard, et l'EDSR dirigée par mBf se réduit à une EDSR classique.
- Le caractère **non linéaire** provient de la dépendance non linéaire de f en (Y, Z) .
- La définition de l'intégrale stochastique par rapport au mBf dépend de la régularité de Hurst H et peut être définie via Skorohod, divergence ou Riemann–Stieltjes.

Définition de l'espace $\tilde{\mathcal{V}}_T$

On considère l'ensemble \mathcal{V}_T des **processus cylindriques lisses adaptés** :

$$u_t = \sum_{i=1}^n F_i \mathbf{1}_{(t_{i-1}, t_i]}(t), \quad 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T,$$

où chaque coefficient F_i est $\mathcal{F}_{t_{i-1}}$ -mesurable et lisse au sens de Malliavin ($F_i \in \mathbb{D}^{1,2}$).
Pour un paramètre $\beta > 0$, on définit la norme exponentielle :

$$\|u\|_\beta^2 := \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\beta t} |u_t|^2 dt \right]. \quad (2.23)$$

Le **complété** de \mathcal{V}_T pour cette norme est noté :

$$\tilde{\mathcal{V}}_T := \overline{\mathcal{V}_T}^{\|\cdot\|_\beta}.$$

Ainsi, $\tilde{\mathcal{V}}_T$ est un espace de Banach adapté à l'étude des intégrales de Skorohod fractionnaires. Cette définition permet d'appliquer les estimations a priori, les arguments de Picard, ainsi que l'inégalité de Gronwall fractionnaire, tout en conservant un cadre rigoureux pour les processus adaptés à la filtration naturelle du mouvement brownien fractionnaire.

Hypothèses de travail

D1. La fonction

$$f : [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

est globalement Lipschitz en (y, z) . Autrement dit, il existe une constante $L > 0$ telle que, pour tout $t \in [0, T]$ et tout $y_1, y_2, z_1, z_2 \in \mathbb{R}$,

$$|f(t, y_1, z_1) - f(t, y_2, z_2)| \leq L(|y_1 - y_2| + |z_1 - z_2|).$$

D2. Le couple (Y, Z) appartient aux espaces fonctionnels adaptés à l'intégrale de Skorohod fractionnaire :

$$Y \in \tilde{\mathcal{V}}_T, \quad Z \in \mathbb{L}_H^2([0, T]),$$

ce qui garantit que l'intégrale anticipative $\int_0^T Z_s \delta B_s^H$ est bien définie.

D3. La croissance de f est contrôlée, c'est-à-dire :

$$\mathbb{E} \int_0^T |f(s, Y_s, Z_s)|^2 ds < \infty,$$

assurant l'existence des intégrales déterministes et stochastiques dans l'EDSR.

Existence et Unicité de la solution

Dans cette section, nous étudions le problème d'existence et d'unicité des solutions des équations différentielles stochastiques rétrogrades (EDSR) non linéaires dirigées par un mouvement brownien fractionnaire $(B_t^H)_{t \in [0, T]}$ de paramètre de Hurst $H > \frac{1}{2}$.

Énoncé du problème

On considère l'EDSR non linéaire suivante :

$$\begin{cases} dy_t = -f(t, \eta_t, y_t, z_t) dt - z_t \delta B_t^H, & 0 \leq t \leq T, \\ y_T = \xi = g(\eta_T), \end{cases} \quad (2.24)$$

où :

- B^H est un mouvement brownien fractionnaire de Hurst $H \in (1/2, 1)$,
- η_t est un processus de support adapté,
- le générateur $f(t, x, y, z)$ est globalement lipschitzien en (y, z) ,

Lemme 2 [Estimation a priori, [6]]

Soit (\hat{y}, \hat{z}) la solution de l'EDSR linéaire :

$$\begin{cases} d\hat{y}_t = -g_t dt - \hat{z}_t \delta B_t^H, \\ \hat{y}_T = 0, \end{cases}$$

où g est adapté et $\mathbb{E}[\int_0^T |g_t|^2 dt] < \infty$. Alors, pour tout $\beta > 0$, il existe des constantes $C_H > 0$ et $C' > 0$ dépendant de H et des bornes liées au noyau fractionnaire, telles que

$$\|\hat{y}\|_\beta^2 + C_H \|\hat{z}\|_\beta^2 \leq \frac{C'}{\beta} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\beta t} |g_t|^2 dt \right], \quad (2.25)$$

où

$$\|u\|_\beta^2 := \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\beta t} |u_t|^2 dt \right].$$

Démonstration

Soit (\hat{y}, \hat{z}) la solution de l'EDSR linéaire :

$$d\hat{y}_t = -g_t dt - \hat{z}_t \delta B_t^H, \quad \hat{y}_T = 0, \quad (2.26)$$

avec $g \in L^2(\Omega \times [0, T])$ adapté.

Étape 1 : Application de la formule d'intégration par parties fractionnaire.

Pour tout $\beta > 0$, considérons la fonction pondérée $e^{\beta t} |\hat{y}_t|^2$. En appliquant la formule d'Itô-Skorohod adaptée au MBF (voir [6]), on obtient :

$$d(e^{\beta t} |\hat{y}_t|^2) = \beta e^{\beta t} |\hat{y}_t|^2 dt + 2e^{\beta t} \hat{y}_t d\hat{y}_t + d\langle \hat{y}, \hat{y} \rangle_t^H \quad (2.27)$$

$$= \beta e^{\beta t} |\hat{y}_t|^2 dt - 2e^{\beta t} \hat{y}_t g_t dt - 2e^{\beta t} \hat{y}_t \hat{z}_t \delta B_t^H + e^{\beta t} D^H \hat{y}_t \hat{z}_t dt \quad (2.28)$$

où D^H désigne la dérivée de Malliavin associée au MBF, et $\langle \hat{y}, \hat{y} \rangle_t^H$ la variation quadratique par rapport au mouvement brownien fractionnaire.

Le terme $D^H \hat{y}_t \hat{z}_t dt$ provient de l'identité :

$$\hat{z}_t \delta B_t^H = \hat{z}_t dB_t^H + D^H \hat{z}_t dt, \quad (2.29)$$

qui relie l'intégrale de Skorohod à la dérivée de Malliavin.

Étape 2 : Intégration sur $[t, T]$ et passage à l'espérance.

En intégrant (3.17) sur $[t, T]$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{\beta T} |\hat{y}_T|^2 - e^{\beta t} |\hat{y}_t|^2 &= \int_t^T \beta e^{\beta s} |\hat{y}_s|^2 ds - 2 \int_t^T e^{\beta s} \hat{y}_s g_s ds \\ &\quad - 2 \int_t^T e^{\beta s} \hat{y}_s \hat{z}_s \delta B_s^H + \int_t^T e^{\beta s} D^H \hat{y}_s \hat{z}_s ds. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Or, $\hat{y}_T = 0$. En prenant l'espérance et en utilisant le fait que l'intégrale de Skorohod est centrée :

$$\mathbb{E} \left[\int_t^T e^{\beta s} \hat{y}_s \hat{z}_s \delta B_s^H \right] = 0,$$

on obtient :

$$\mathbb{E}[e^{\beta t} |\hat{y}_t|^2] + 2 \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{\beta s} \hat{y}_s g_s ds \right] = \mathbb{E} \left[\int_t^T \beta e^{\beta s} |\hat{y}_s|^2 ds \right] + \mathbb{E} \left[\int_t^T e^{\beta s} D^H \hat{y}_s \hat{z}_s ds \right]. \quad (2.31)$$

Étape 3 : Majoration des termes croisés.

1. Termes $\hat{y}_s g_s$: En utilisant l'inégalité de Young, pour tout $\epsilon > 0$:

$$2|\hat{y}_s g_s| \leq \epsilon |\hat{y}_s|^2 + \frac{1}{\epsilon} |g_s|^2. \quad (2.32)$$

2. Termes $D^H \hat{y}_s \hat{z}_s$: En appliquant les estimations classiques du noyau fractionnaire (voir [6]), on a $D^H \hat{y}_s \leq C_H \hat{z}_s$. Ainsi :

$$\mathbb{E} \int_t^T e^{\beta s} |D^H \hat{y}_s \hat{z}_s| ds \leq C_H \mathbb{E} \int_t^T e^{\beta s} |\hat{z}_s|^2 ds. \quad (2.33)$$

Étape 4 : Obtention de l'inégalité a priori.

En combinant (3.21) et (3.22) et en choisissant $\epsilon = \beta/2$, on obtient :

$$\mathbb{E}[e^{\beta t} |\hat{y}_t|^2] + C_H \mathbb{E} \int_t^T e^{\beta s} |\hat{z}_s|^2 ds \leq \frac{C'}{\beta} \mathbb{E} \int_t^T e^{\beta s} |g_s|^2 ds, \quad (2.34)$$

où $C_H, C' > 0$ dépendent de H et des constantes provenant des inégalités de Young et du noyau fractionnaire.

En intégrant sur $t \in [0, T]$, on obtient la norme pondérée :

$$\|\hat{y}\|_\beta^2 + C_H \|\hat{z}\|_\beta^2 \leq \frac{C'}{\beta} \mathbb{E} \int_0^T e^{\beta s} |g_s|^2 ds,$$

ce qui conclut la preuve.

Théorème du point fixe de Banach (ou Contraction)

Théorème 4 [Banach]

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $T : X \rightarrow X$ une application telle qu'il existe $\rho \in [0, 1)$ vérifiant

$$\|T(x) - T(y)\| \leq \rho \|x - y\|, \quad \forall x, y \in X.$$

Alors T admet un unique point fixe $x^* \in X$, c'est-à-dire $T(x^*) = x^*$, et pour toute suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par $x_{n+1} = T(x_n)$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*, \quad \text{avec } \|x_n - x^*\| \leq \frac{\rho^n}{1 - \rho} \|x_1 - x_0\|.$$

Remarque : Le théorème permet de garantir à la fois l'existence et l'unicité d'une solution dans un espace complet lorsqu'on peut montrer que l'application considérée est une contraction stricte. Dans le cas des EDSR non linéaires dirigées par un MBF, l'application Λ définie sur l'espace \mathbb{S}_β satisfait cette condition pour un $\beta > 0$ suffisamment grand.

Théorème d'existence et d'unicité

Théorème 5 ([6])

Sous les hypothèses **(D1)**–**(D3)**, il existe une constante $\beta > 0$ suffisamment grande telle que l'équation différentielle stochastique rétrograde (EDSR) **non linéaire**

$$\begin{cases} dy_t = -f(t, \eta_t, y_t, z_t) dt - z_t \delta B_t^H, & 0 \leq t \leq T, \\ y_T = \xi, \end{cases} \quad (2.35)$$

admet une *solution unique* (y, z) appartenant à l'espace de Banach

$$\mathfrak{S}_\beta := \widetilde{\mathcal{V}}_T \times \widetilde{\mathcal{V}}_T,$$

muni de la norme

$$\|(y, z)\|_\beta^2 := \|y\|_\beta^2 + \|z\|_\beta^2, \quad \|u\|_\beta^2 := \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\beta t} |u_t|^2 dt \right].$$

Démonstration.

Étape 1 — Espace fonctionnel et norme.

On considère $\widetilde{\mathcal{V}}_T$ comme le complété de l'ensemble des processus cylindriques lisses adaptés pour la norme pondérée

$$\|u\|_\beta^2 := \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\beta t} |u_t|^2 dt \right].$$

On définit alors l'espace produit

$$\mathfrak{S}_\beta := \widetilde{\mathcal{V}}_T \times \widetilde{\mathcal{V}}_T,$$

muni de la norme produit

$$\|(y, z)\|_\beta^2 := \|y\|_\beta^2 + \|z\|_\beta^2.$$

Cet espace est un espace de Banach. Il est particulièrement adapté à l'application des estimations a priori obtenues au Lemme 2 pour les EDSR linéaires.

Étape 2 — Définition de l'application Λ .

Pour tout $\mathbf{u} = (y, z) \in \mathfrak{S}_\beta$, on définit l'application

$$\Lambda : \mathfrak{S}_\beta \longrightarrow \mathfrak{S}_\beta, \quad \Lambda(\mathbf{u}) := (\hat{y}, \hat{z}),$$

où (\hat{y}, \hat{z}) est l'unique solution de l'EDSR linéaire

$$\begin{cases} d\hat{y}_t = -f(t, \eta_t, y_t, z_t) dt - \hat{z}_t \delta B_t^H, & 0 \leq t \leq T, \\ \hat{y}_T = \xi. \end{cases} \quad (2.36)$$

Remarques.

1. Bien que l'EDSR originale (2.35) soit non linéaire en (y, z) , on fige temporairement ces variables dans le coefficient $f(t, \eta_t, y_t, z_t)$.

2. Le processus $f(t, \eta_t, y_t, z_t)$ étant alors donné, l'équation (2.36) est linéaire par rapport à (\hat{y}, \hat{z}) .
3. L'existence et l'unicité de (\hat{y}, \hat{z}) dans $\widetilde{\mathcal{V}}_T$ sont assurées par les résultats d'existence pour les EDSR linéaires dirigées par un mouvement brownien fractionnaire, fondés sur les propriétés de l'espérance quasi-conditionnelle.
4. L'application Λ associe ainsi à chaque (y, z) un nouveau couple (\hat{y}, \hat{z}) , ce qui permet d'appliquer le théorème du point fixe de Banach.

Étape 3 — Vérification de la contraction.

Soient $\mathbf{u}_1 = (y_1, z_1)$ et $\mathbf{u}_2 = (y_2, z_2)$ deux éléments quelconques de l'espace de Banach $\mathbb{S}_\beta = \widetilde{\mathcal{V}}_T \times \widetilde{\mathcal{V}}_T$. Notons

$$\Delta y := y_1 - y_2, \quad \Delta z := z_1 - z_2, \quad \Delta f_t := f(t, \eta_t, y_{1,t}, z_{1,t}) - f(t, \eta_t, y_{2,t}, z_{2,t}).$$

Par définition de l'application Λ , les couples

$$\Lambda(\mathbf{u}_1) = (\hat{y}_1, \hat{z}_1), \quad \Lambda(\mathbf{u}_2) = (\hat{y}_2, \hat{z}_2)$$

sont les solutions respectives des EDSR linéaires

$$\begin{cases} d\hat{y}_{i,t} = -f(t, \eta_t, y_{i,t}, z_{i,t}) dt - \hat{z}_{i,t} \delta B_t^H, \\ \hat{y}_{i,T} = \xi, \end{cases} \quad i = 1, 2.$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient que le couple

$$\Delta \hat{y} := \hat{y}_1 - \hat{y}_2, \quad \Delta \hat{z} := \hat{z}_1 - \hat{z}_2$$

vérifie l'EDSR linéaire à condition terminale nulle

$$\begin{cases} d(\Delta \hat{y}_t) = -\Delta f_t dt - \Delta \hat{z}_t \delta B_t^H, & 0 \leq t \leq T, \\ \Delta \hat{y}_T = 0. \end{cases} \quad (2.37)$$

D'après le Lemme 2 (estimation a priori pour les EDSR linéaires dirigées par un mouvement brownien fractionnaire), il existe des constantes positives C_H et C' , ne dépendant que de H et de T , telles que

$$\|\Delta \hat{y}\|_\beta^2 + C_H \|\Delta \hat{z}\|_\beta^2 \leq \frac{C'}{\beta} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{\beta t} |\Delta f_t|^2 dt \right]. \quad (2.38)$$

Par l'hypothèse de Lipschitzianité globale de f par rapport aux variables (y, z) , il existe une constante $L > 0$ telle que, pour presque tout $t \in [0, T]$,

$$|\Delta f_t| \leq L(|\Delta y_t| + |\Delta z_t|).$$

En élevant au carré et en utilisant l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$, on obtient

$$|\Delta f_t|^2 \leq 2L^2(|\Delta y_t|^2 + |\Delta z_t|^2).$$

En injectant cette estimation dans (2.38), il vient

$$\|\Delta \hat{y}\|_\beta^2 + C_H \|\Delta \hat{z}\|_\beta^2 \leq \frac{2L^2 C'}{\beta} (\|\Delta y\|_\beta^2 + \|\Delta z\|_\beta^2).$$

Enfin, comme

$$\min(1, C_H) (\|\Delta \hat{y}\|_\beta^2 + \|\Delta \hat{z}\|_\beta^2) \leq \|\Delta \hat{y}\|_\beta^2 + C_H \|\Delta \hat{z}\|_\beta^2,$$

on obtient

$$\|\Lambda(\mathbf{u}_1) - \Lambda(\mathbf{u}_2)\|_\beta^2 \leq \rho^2 \|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_\beta^2, \quad \rho^2 := \frac{2L^2 C'}{\beta \min(1, C_H)}. \quad (2.39)$$

En choisissant $\beta > 0$ suffisamment grand, on a $\rho < 1$, et l'application Λ est donc une contraction stricte sur \mathbb{S}_β .

Étape 4 — Existence et unicité par le théorème du point fixe.

L'espace $(\mathbb{S}_\beta, \|\cdot\|_\beta)$ étant un espace de Banach et l'application $\Lambda : \mathbb{S}_\beta \rightarrow \mathbb{S}_\beta$ étant contractante, le théorème du point fixe de Banach s'applique.

Il existe donc un unique élément

$$\mathbf{u}^* = (y, z) \in \mathbb{S}_\beta$$

tel que

$$\Lambda(\mathbf{u}^*) = \mathbf{u}^*.$$

Par définition de Λ , cela signifie que le couple (y, z) satisfait l'EDSR

$$\begin{cases} dy_t = -f(t, \eta_t, y_t, z_t) dt - z_t \delta B_t^H, & 0 \leq t \leq T, \\ y_T = \xi, \end{cases}$$

c'est-à-dire l'EDSR non linéaire (2.35). L'existence d'une solution est ainsi établie.

Pour l'unicité, supposons qu'il existe deux solutions (y, z) et (\tilde{y}, \tilde{z}) appartenant à \mathbb{S}_β . En posant

$$\Delta y := y - \tilde{y}, \quad \Delta z := z - \tilde{z},$$

et en reprenant exactement l'argument développé à l'Étape 3, on obtient

$$\|\Delta y\|_\beta^2 + \|\Delta z\|_\beta^2 \leq \rho^2 (\|\Delta y\|_\beta^2 + \|\Delta z\|_\beta^2).$$

Comme $\rho < 1$, cette inégalité implique nécessairement

$$\|\Delta y\|_\beta^2 + \|\Delta z\|_\beta^2 = 0,$$

d'où

$$\Delta y_t = 0, \quad \Delta z_t = 0, \quad \text{p.p. sur } [0, T] \times \Omega.$$

La solution de l'EDSR non linéaire est donc unique dans \mathbb{S}_β . □

Remarques.

- L'utilisation de l'intégrale de Skorohod δB^H et de la dérivée de Malliavin D^H est essentielle pour définir rigoureusement les espaces fonctionnels $\tilde{\mathcal{V}}_T$ et \mathbb{L}_H^2 , ainsi que pour établir les estimations a priori nécessaires à l'analyse des EDSR dirigées par un mouvement brownien fractionnaire.
- Les constantes positives C_H et C' proviennent des bornes associées à l'opérateur d'intégration de Skorohod et des propriétés analytiques du noyau fractionnaire lié au mouvement brownien fractionnaire.
- Le paramètre $\beta > 0$ joue un rôle fondamental dans la méthode du point fixe : il permet de contrôler la contraction de l'application Λ et d'absorber les termes croisés apparaissant dans les estimations a priori, garantissant ainsi la convergence de la suite d'itérations.

Comparaison avec les résultats de [2]

Dans l'article [2], Christian Bender étudie une classe particulière d'équations différentielles stochastiques rétrogrades linéaires dirigées par un mouvement brownien fractionnaire (mBf). Il obtient des solutions explicites en utilisant une correspondance avec des équations aux dérivées partielles EDP (méthode dite du four-step scheme") et en imposant certaines restrictions sur le générateur et les coefficients de l'équation. Cette approche permet de donner des formules fermées pour les solutions, mais elle est limitée à des cas linéaires spécifiques et ne traite pas les générateurs non linéaires.

En revanche, [6] proposent une méthode plus générale pour traiter à la fois les EDSR linéaires et non linéaires dirigées par un mBf avec $H > \frac{1}{2}$. Leur approche repose sur :

- le calcul de Malliavin et l'intégrale de Skorohod pour gérer les intégrales stochastiques anticipatives,
- la notion d'espérance quasi-conditionnelle pour surmonter l'absence de représentation martingale classique pour le mBf,
- des estimations a priori et des schémas d'itération de type Picard pour démontrer l'existence et l'unicité des solutions.

Ainsi, la principale différence est que Bender(2005) fournit des solutions explicites pour une classe restreinte d'équations linéaires, tandis que Hu et Peng(2009) offrent un cadre théorique plus

robuste et général, capable de traiter des générateurs non linéaires et des coefficients aléatoires, et donnant un théorème d'existence et d'unicité applicable à un plus large éventail de EDSR fractionnaires.

En résumé :

	Bender (2005)	Hu & Peng (2009)
Type d'équation	Linéaire	Linéaire et non linéaire
Méthode	Solutions explicites / correspondance EDP	Malliavin, Skorohod, quasi-conditionnelle, Picard
Générateur	Restreint	Lipschitz, potentiellement non linéaire
Résultat	Formules fermées	Existence et unicité générale

Conclusion et Perspectives

Le présent mémoire avait pour objectif d'étudier les **Équations Différentielles Stochastiques Rétrogrades** (EDSR) dirigées par un **Mouvement Brownien Fractionnaire** (mBf). Ce cadre non classique se caractérise par une dépendance temporelle marquée et par l'absence de structure de martingale. Pour atteindre cet objectif, nous avons introduit progressivement les outils fondamentaux de la théorie des processus stochastiques, avant de développer les propriétés spécifiques du mBf et les défis analytiques qu'il engendre.

L'étude des EDSR dans ce contexte non markovien a mis en évidence la nécessité d'utiliser des outils avancés tels que le **Calcul de Malliavin**, l'**intégrale de Skorohod**, l'**espérance quasi-conditionnelle** ainsi que des **espaces de Banach pondérés**. Ces outils permettent de définir rigoureusement le processus intégrant et de traiter la nature non adaptée du bruit fractionnaire. Le Chapitre III, cœur de ce travail, a permis d'établir les résultats d'**existence et d'unicité** dans les cas linéaire et non linéaire, en suivant la méthodologie de HU et PENG [6]. Ces résultats démontrent que la théorie classique des EDSR peut être généralisée à un cadre où la mémoire stochastique joue un rôle essentiel.

Les résultats obtenus ouvrent plusieurs pistes de recherche prometteuses pour étendre et appliquer cette théorie :

- **Généralisation à d'autres processus fractionnaires** : Une perspective naturelle consiste à étendre ces résultats à des processus plus généraux, tels que les **processus de Lévy fractionnaires** ou les intégrales stochastiques par rapport à des martingales fractionnaires généralisées. L'enjeu réside dans l'adaptation des outils du calcul de Malliavin à ces cadres non gaussiens.
- **EDSR avec sauts et mBf** : L'intégration de termes de sauts (processus de Poisson composés) dans l'EDSR dirigée par un mBf (**EDSR-mBf avec sauts**) permettrait de modéliser des chocs soudains. Cette approche hybride est particulièrement pertinente pour les applications en finance et en assurance, où la persistance temporelle coexiste avec des discontinuités de marché.

- **Développement de schémas numériques** : Une étape essentielle pour la mise en œuvre pratique consiste à développer des **schémas de discrétisation** (de type Euler ou Runge-Kutta stochastique) stables et convergents. En raison de la non-markovianité du mBf, la conception d'un algorithme permettant de calculer le couple solution (Y_t, Z_t) constituerait une contribution majeure à la littérature computationnelle.
- **Résolution dans le régime rugueux** ($0 < H < 1/2$) : Alors que le cas $H > 1/2$ bénéficie d'une régularité suffisante, le régime du **mBf rugueux** ($H \in (0, 1/2)$) présente des défis mathématiques majeurs. Une piste de recherche fondamentale consiste à :
 - Appliquer la **théorie des trajectoires rugueuses (Rough Paths)** pour donner un sens aux intégrales stochastiques.
 - Étudier la **représentation des solutions** via des opérateurs de dérivation fractionnaire adaptés à la faible régularité de Hurst.
 - Gérer la singularité du noyau à l'origine, complexifiant les estimations *a priori* nécessaires au principe du point fixe de Picard.

Bibliographie

- [1] Bai, L., and Ma, J. (2015), Stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion and Poisson point process. *Bernoulli*, **21**(1), 303–334.
- [2] Bender, C. (2005), Explicit solutions of a class of linear fractional BSDEs, *Systems & Control Letters*, **54** (2005), pp. 671–680.
- [3] Bismut, J-M. (1973), Théorie probabiliste du contrôle des processus diffusants, *Memoirs of the American Mathematical Society*, vol. 4, no. 167.
- [4] Breton, J-C. (2024), Processus stochastiques, cours de Master 2 Mathématiques, Université de Rennes, septembre–octobre
- [5] Elie, R. et Kharroubi, I., Calcul stochastique appliqué à la finance, support de cours, Université Paris-Diderot, s.d.
- [6] Hu, Y. and Peng, S. (2009), Backward Stochastic Differential Equation Driven by Fractional Brownian Motion, *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 48, no. 3, pp. 1675–1700.
- [7] Hu, Y. (2005), Integral transformations and anticipative calculus for fractional Brownian motions, *Memoirs of the American Mathematical Society*, **175**, no. 825, viii+127 pp.
- [8] Jeanblanc, M. (2006), Cours de Calcul Stochastique, Master 2 IF, Université d'Évry, septembre .
- [9] Kolmogorov, A. N. (1940), Wiener Spirals and the Hölder Condition of Paths of Random Processes, *Doklady Akademii Nauk SSSR*, vol. 26, pp. 115–118.
- [10] Lévêque, O. (2004–2005), Cours de probabilités et calcul stochastique, École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL), semestre d'hiver .
- [11] Mandelbrot, B. et van Ness, J.W. (1968), Fractional Brownian motions, fractional noises and applications, *SIAM Review*, vol. 10, no. 4, pp. 422–437.
- [12] Maticiuc, L. et Nie, T. (2018), Fractional backward stochastic differential equations and fractional backward variational inequalities, *School of Mathematics and Statistics, University of Sydney, Australie*, 5 octobre .
- [13] Pardoux, É. and Peng, S. (1990), Adapted solution of a backward stochastic differential equation, *Systems & Control Letters*, **14**(1):55–61, 1990.
- [14] Shao, Y., Du, J., Li, X., Tan, Y. et Son, J. (2024), Caputo fractional backward stochastic differential equations driven by fractional Brownian motion with delayed generator, *Boundary Value Problems*, Article number: 1842.
- [15] Turinici, G. (2021), Méthodes numériques : problèmes dépendant du temps, Cours de Master 1^{ère} année en Mathématiques Appliquées, Université Paris Dauphine–PSL, 7 avril.